10. 3 Nyquist Diagram and Nyquist Criterion

주파수 **ω**값에 따른 개루프 전달함수 G(j **ω**) 의 크기와 위상을 극좌표상에 표시한 선도이다.

즉, Nyquist 선도는 주파수 **ω**가 0에서 ∞로 변할 때 복소벡터 G(j **ω**) (= |G(j **ω**)|∠G(j **ω**))의 궤적을 그린 것

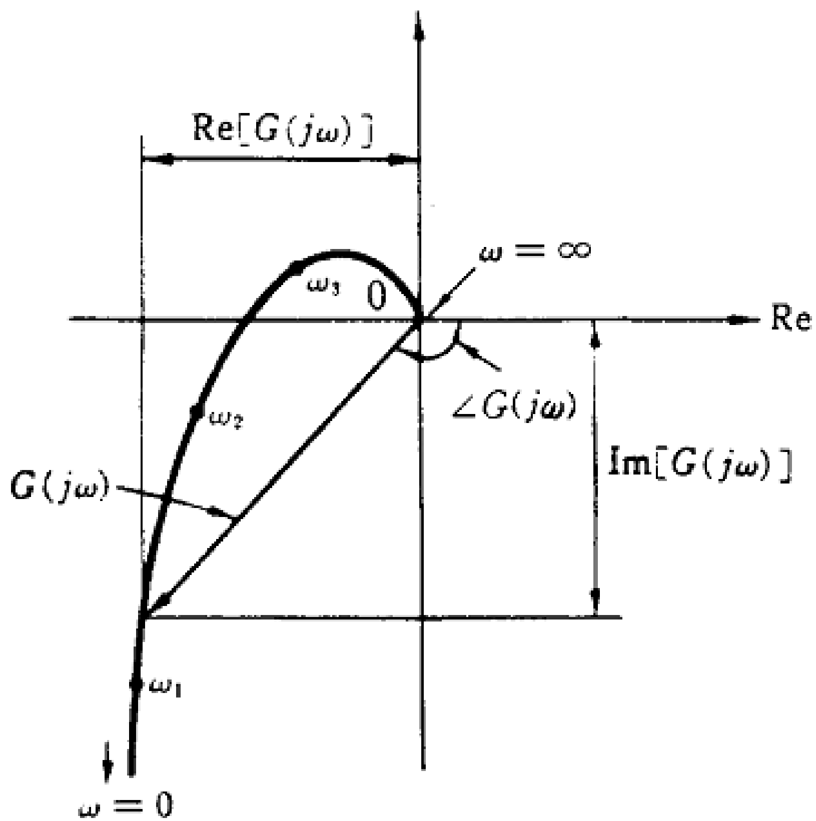


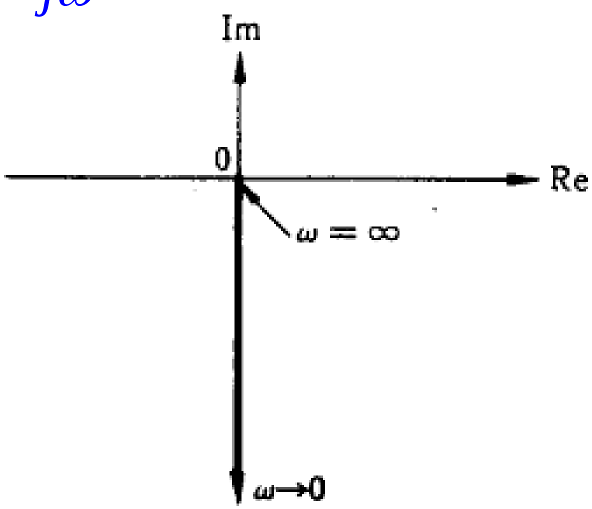
그림 5.14 극좌표선도

▶ 주파수응답을 극좌표선도로 표시하는 방법

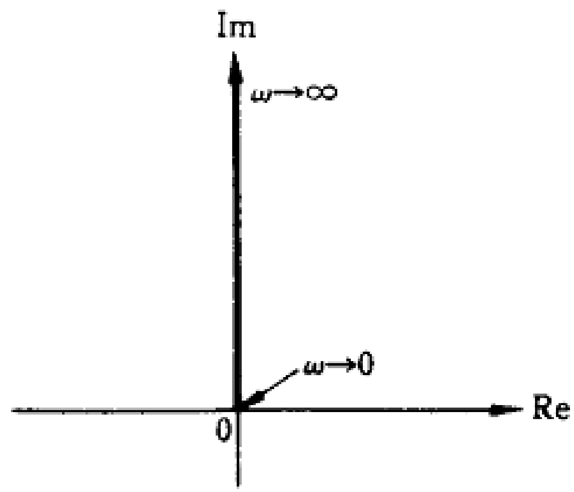
(1) 미・적분 요소의 극좌표선도

$$G(s = j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$G(s = j\omega) = j\omega$$



(a)



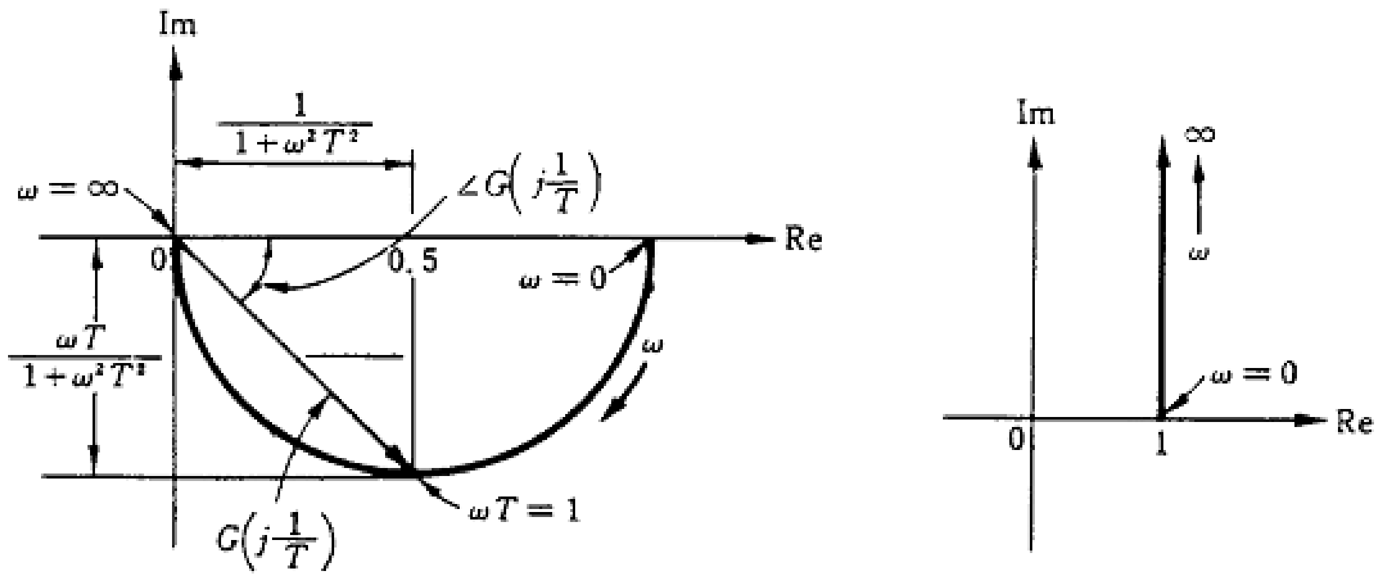
(b)

그림 5.15 (a) 적분요소의 극좌표선도 (b) 미분요소의 극좌표선도

(2) 1차 요소의 극좌표선도

1차 시스템의 주파수 전달함수 $G(j\omega)$ 를 극좌표로 표시하면

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{1+\omega^2 T^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1}\omega T$$



(a) (b)

그림 5.16 (a) $1/(1+j\omega T)$ 의 극좌표선도, (b) $1+j\omega T$의 극좌표선도

(3) 2차 요소의 극좌표선도

일반적인 2차 시스템의 주파수 전달함수 $G(j\omega)$ 는

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (\zeta > 0)$$

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

여기서, 주파수 ω를 극한값 0과 ∞로 접근시키면

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = 1\angle 0^\circ \ ; \ \lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = 0\angle -180^\circ$$

이와 같이 2차 요소의 Nyquist 궤적은 $\omega = 0$ 일 때 $1\angle 0^\circ$ 에서 출발하여 $\omega \to \infty$ 일 때 $0\angle -180^\circ$ 에서 끝난다.

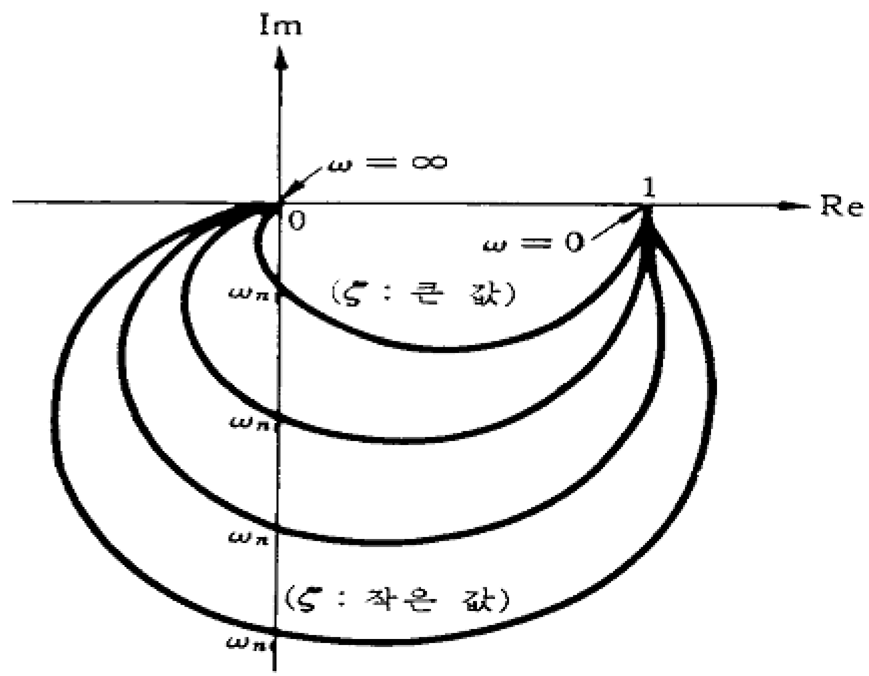


그림 5.17 $\dfrac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$ 의 극좌표선도

시스템의 입력주파수 ω가 고유주파수 ω_n과 같은 경우, 2차 시스템의 주파수 전달함수 $G(j\omega_n)$ 은 $1/(j2\zeta)$ 가 된다.
시스템의 게인이 최대가 되는 주파수 => 공진주파수 ω_r
$\zeta \gg 1$ 인 경우에는 Nyquist 궤적이 반원 모양에 가까워진다.

다음의 2차 요소에 대한 극좌표선도를 작도

$$G(j\omega) = 1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right) + j\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\{1-(\omega/\omega_n{}^2)\}^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

여기서, 주파수 ω 를 극한값 0과 ∞ 로 접근시키면,

$$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega) = 1\angle 0^\circ \; ; \; \lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = \infty\angle 180^\circ$$

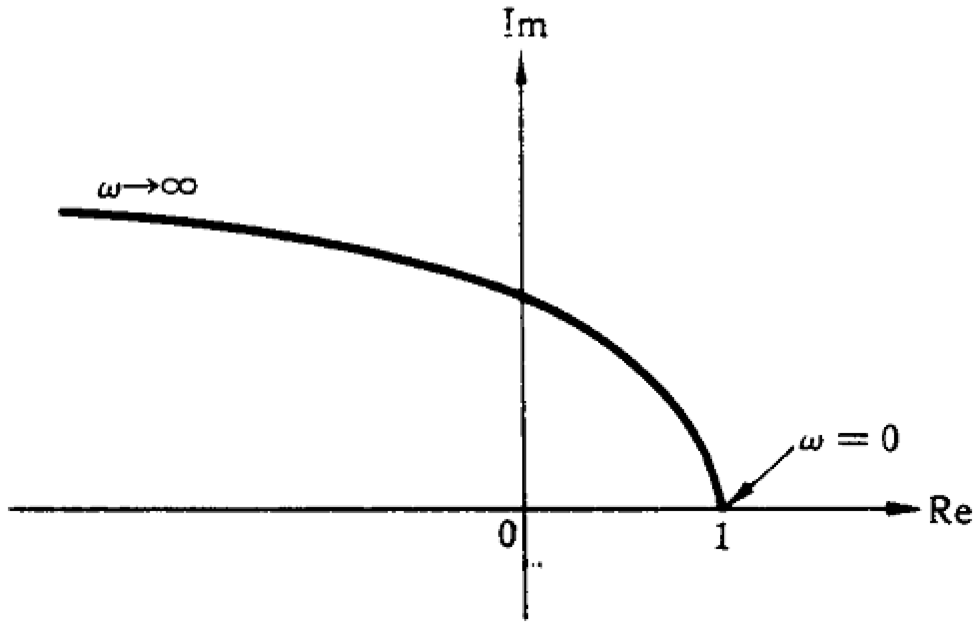


그림 5.18 $1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2$ 의 극좌표선도

$$G(s) = K\frac{(1+T_{z1}s)(1+T_{z2}s)\cdots(1+T_{zm}s)}{s^{\lambda}(1+T_{p1}s)(1+T_{p2}s)\cdots(1+T_{pn}s)}$$

1. **λ** = 0인 경우 (제 0형 시스템)
   ω= 0 => 주파수 궤적의 접선은 실수축에 직교
   ω= ∞ => 원점이며 궤적이 실수축 혹은 허수축 중의 하나

2. **λ** = 1인 경우 (제 1형 시스템)
ω= 0 => 음의 허수축 방향에서 ∞의 크기를 가지고 출발
ω= ∞ => 원점이며 궤적이 실수축 혹은 허수축 중의 하나

3. **λ** = 2인 경우 (제 2형 시스템)
ω= 0 => 음의 실수축방향에서 ∞의 크기를 가지고 출발
ω= ∞ => 원점이며 궤적이 실수축 혹은 허수축 중의 하나

$$G(s) = K\frac{(1+T_{z1}s)(1+T_{z2}s)\cdots(1+T_{zm}s)}{s^{\lambda}(1+T_{p1}s)(1+T_{p2}s)\cdots(1+T_{pn}s)}$$

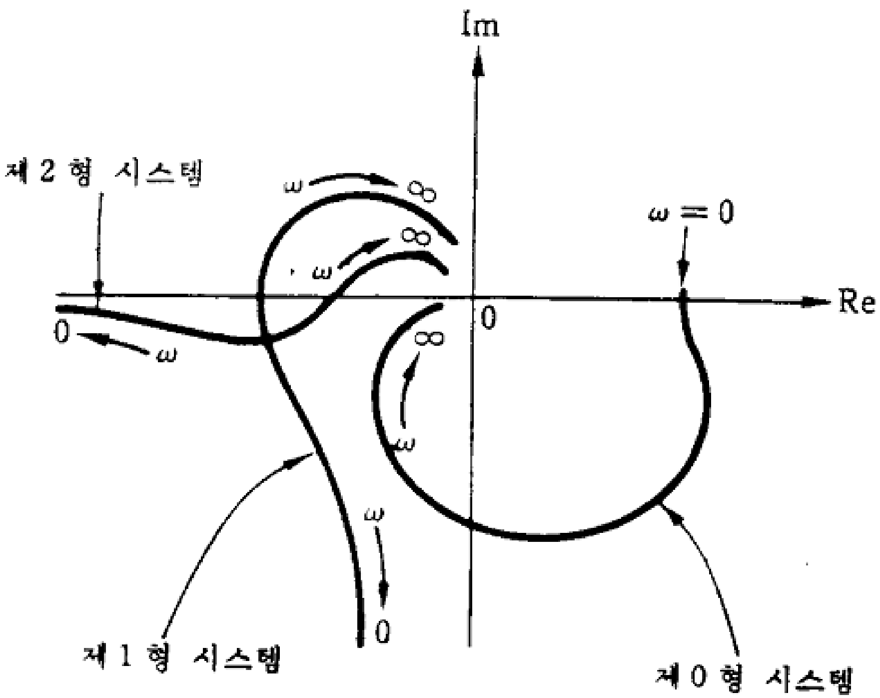


그림 5.20 시스템 형태에 따른 극좌표선도의 일반형태

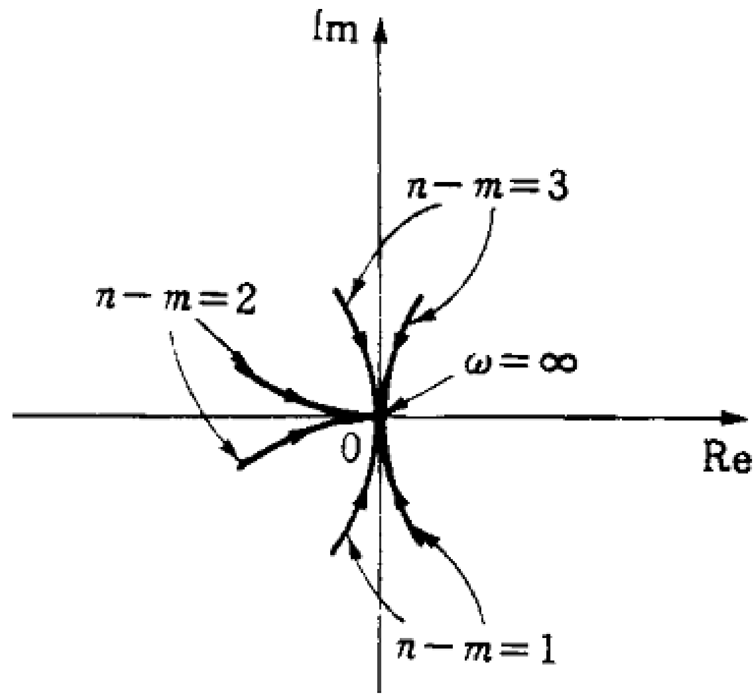


그림 5.21 시스템의 극점과 영점의 개수차 (n−m)에 따른 극좌표선도의 일반형태

그림 5.22 대표적인 전달함수의 주파수응답

전달함수	Nyquist 선도	Bode 선도 log $M(\omega)$	Bode 선도 $\phi(\omega)$	전달함수	Nyquist 선도	Bode 선도 log $M(\omega)$	Bode 선도 $\phi(\omega)$
1	Im, Re, 0, 1	0 dB	0°	$1+\frac{1}{T_i s}$	Im, Re, 0	−1, 0 dB, $\frac{1}{T_i}$	0°, −90°
$\frac{1}{s}$	Im, Re, 0	−1 경사, 0 dB	0°, −90°	$1+\frac{1}{T_i s}+T_d s$	Im, Re, 0	−1, +1, 0 dB, $\frac{1}{T_i}$, $\frac{1}{T_d}$	+90°, 0°, −90°
$\frac{1}{s+1}$	Im, Re, 0	0 dB, −1, $\omega=1$	0°, −90°	$\frac{1}{s^2}$	Im, Re, 0	0 dB, −2	0°, −180°
$\frac{1}{s-1}$	Im, Re, 0	0 dB, −1, 1	0°, −90°, −180°	$\frac{1}{s(s+1)}$	Im, Re, 0	−1, 0 dB, −2	0°, −90°, −180°
$\frac{s}{s+1}$	Im, Re, 0	0 dB, +1, 1	0°, +90°	$\frac{1}{(s+1)(Ts+1)}$ $(0<T<1)$	Im, Re, 0	0 dB, −1, 1, $\frac{1}{T}$, −2	0°, −180°
$\frac{Ts+1}{s+1},\ T>1$	Im, Re, 0	+1, 0dB, 1, $\frac{1}{T}$	0°, +90°	$\frac{1}{s^2+2\zeta s+1}$ $(0<\zeta<0.707)$	Im, Re, 0	0 dB, −2	0°, −180°
$\frac{Ts+1}{s+1},\ T<1$	Im, Re, 0	0 dB, −1, 1, $\frac{1}{T}$	0°, −90°	$s^2+2\zeta s+1$ $(0<\zeta<0.707)$	Im, Re, 0	0 dB, +2	+180°, 0°

10. 3 Nyquist Criterion

근궤적법으로는 실제 제어시스템 설계에서 중요한 상대안정도를 알 수는 없다.

Nyquist 안정도 판별법: 특성방정식의 근을 직접 구하지 않고 단지 개루프 시스템의 주파수응답으로부터 폐루프 시스템의 공칭 및 상대안정도를 쉽게 구할 수 있는 방법

1. 공칭안정도에 관하여 Routh 안정도 판별법과 똑같은 정보를 준다.
2. 시스템의 상대안정도를 시각적으로 알 수 있으며 필요할 때에는 시스템의 안정도를 개선시킬 수 있는 방법을 제시한다.
3. 시스템의 주파수응답에 대한 정보를 준다.
4. 수송지연 요소를 포함하는 시스템의 안정도 해석에 적합하다.
5. 안정도-강인성 이론의 기본 개념이 된다.

한 복소평면에서 다른 복소평면으로 사상(mapping)할 수 있는 해석함수(analytic function) f(s)부터 정의한다.

$\left.\frac{df(s)}{ds}\right|_{s=s_0}$ 가 $s \to s_0$ 로 접근하는 모든 방향에서 존재한다면 복소함수 f(s)는 $s = s_0$ 에서 해석적이라고 한다. 복소함수 f(s)가 해석함수일 때 다음과 같은 편각의 원리를 적용할 수 있다.

▶ 편각의 원리(principle of argument)

C는 s-평면에서 폐쇄된 시계방향의 컨투어(contour)이고 f(s)는 다음과 같은 성질을 갖는 복소함수라고 가정한다.

1. f(s)는 컨투어 C 상에서 해석적이다.
2. f(s)는 컨투어 C 내부에 Z개의 영점을 가지고 있다.
3. f(s)는 컨투어 C 내부에 P개의 극점을 가지고 있다.

컨투어 C를 복소함수 f(s)로 사상할 때 그의 상(image) 은

1. 복소평면에서 폐쇄된 컨투어를 만든다.
2. 컨투어 C_m 은 원점을 시계방향으로 (Z−P)번 둘러싼다.

시계방향의 컨투어 C_m 은 원점을 시계방향으로 Z−P = 0

$s = \sigma + j\omega = re^{j\theta}$ $G(s) = \mathrm{Re}\,G(s) + \mathrm{Im}\,G(s) = |G(s)|e^{j\angle G(s)}$

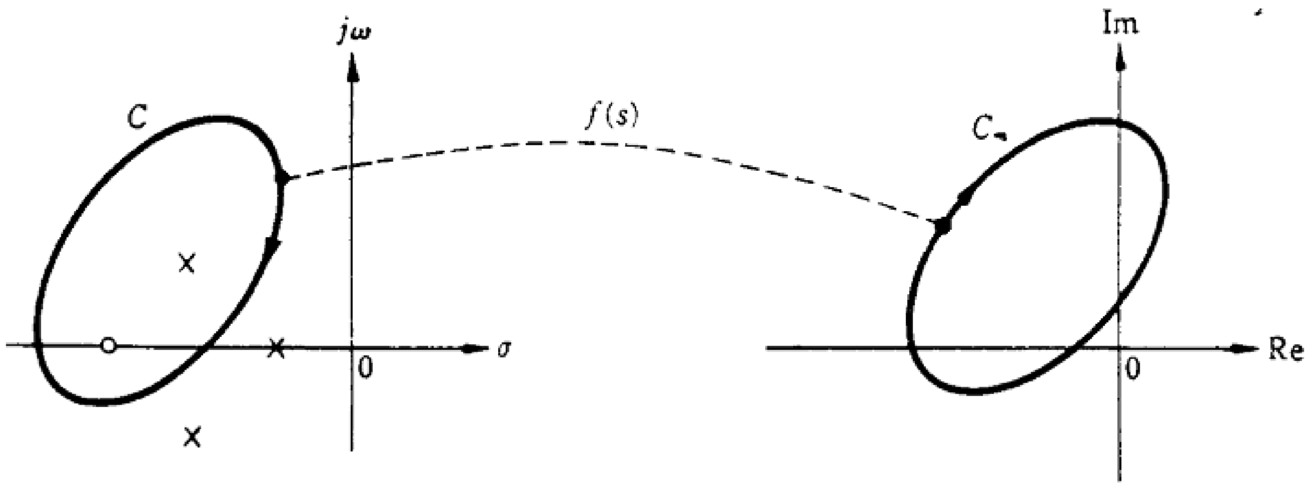


그림 5.23 복소평면에서 $f(s)$로의 사상

$$s = \sigma + j\omega = re^{j\theta}$$

$$G(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_1)\cdots}{(s-p_1)(s-p_1)\cdots}$$
$$= \mathrm{Re}\,G(s) + \mathrm{Im}\,G(s) = |G(s)|e^{j\angle G(s)}$$

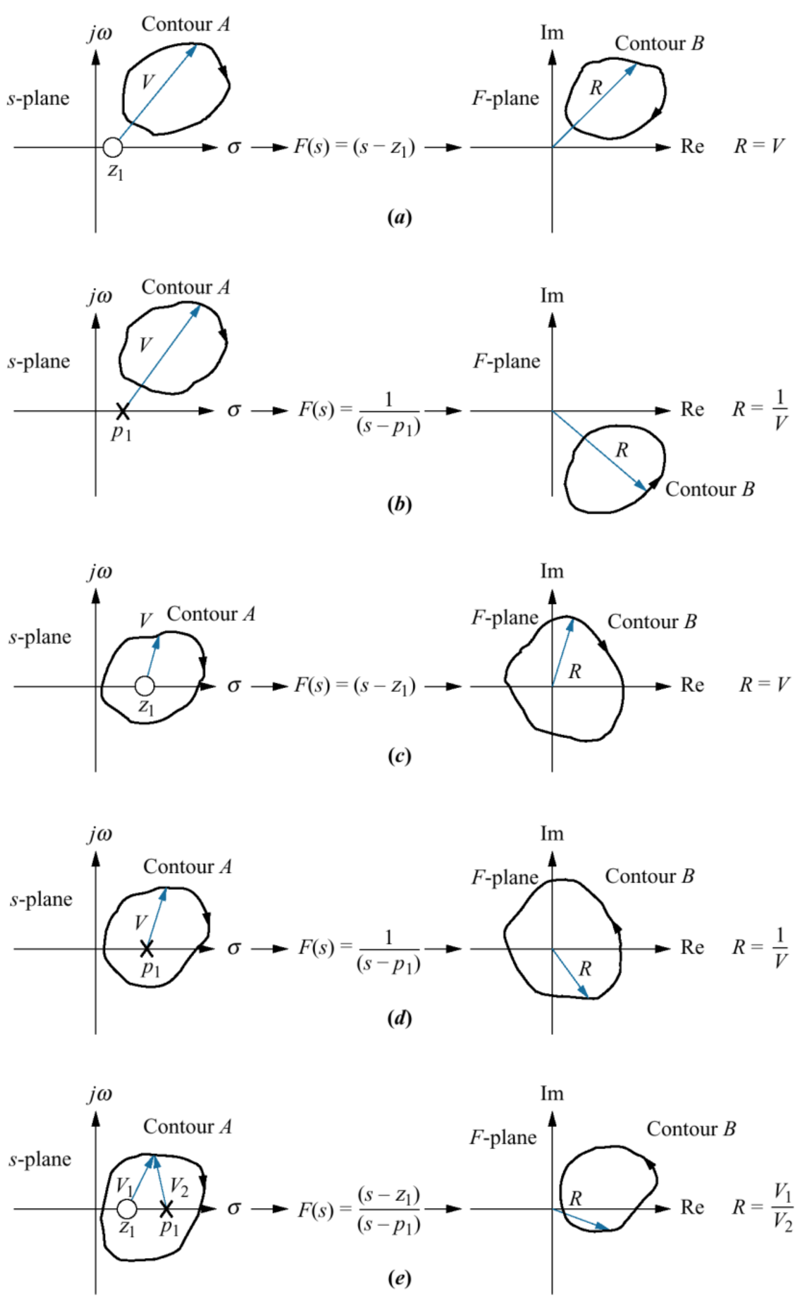


Figure 10.22
Examples of contour mapping

$$s = \sigma + j\omega = re^{j\theta}$$

$$G(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_1)\cdots}{(s-p_1)(s-p_1)\cdots}$$
$$= \mathrm{Re}\,G(s) + \mathrm{Im}\,G(s) = |G(s)|e^{j\angle G(s)}$$

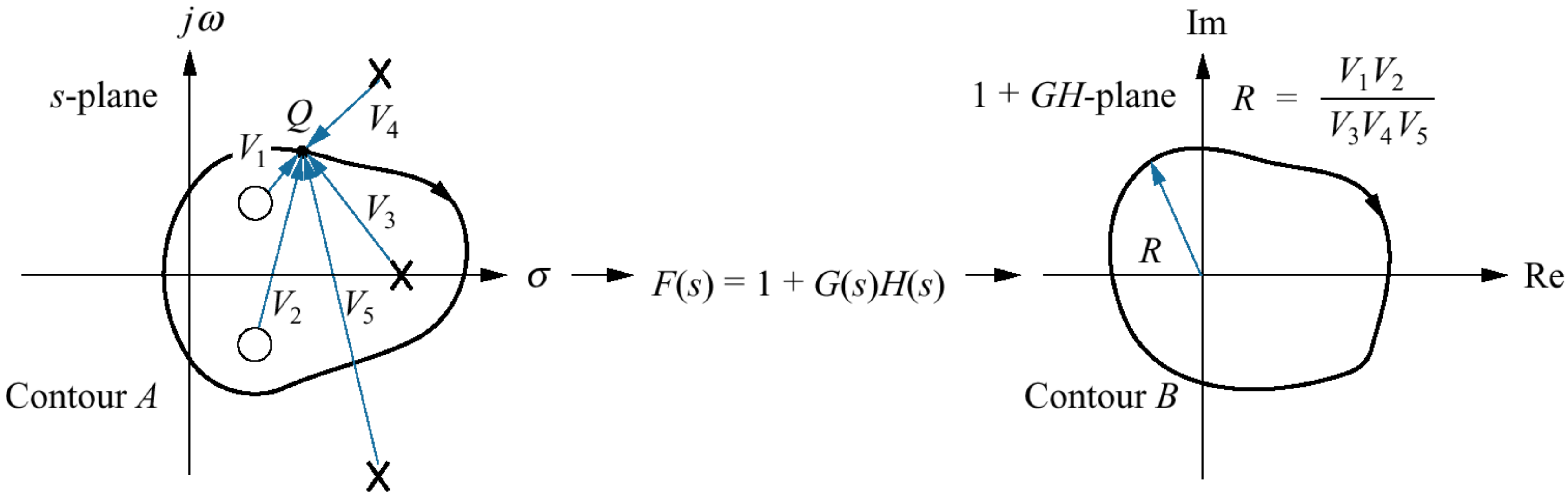


Figure 10.23 Vector representation of mapping

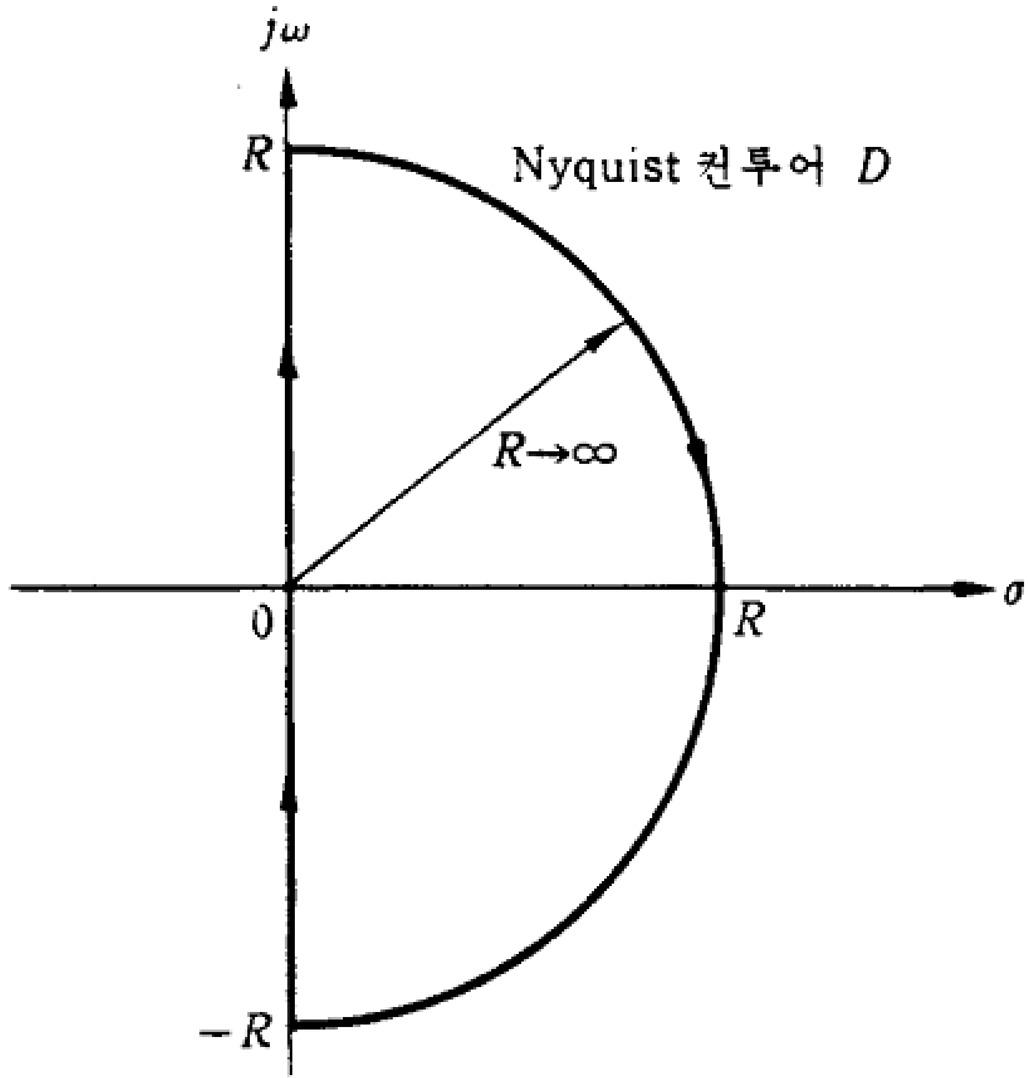
폐쇄된 시계방향의 컨투어 C를 복소함수 f(s)로 사상한 상이 복소수점 a를 시계방향으로 둘러싸는 횟수를 $N(a, f(s), C)$ 라고 표시하면, 이 때 편각의 원리는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$N(0, f(s), C) = Z - P$$

이때 복소함수 f(s)를 두 복소함수의 곱 $f_1(s) \cdot f_2(s)$ 로 나타낼 수 있다고 가정하고 컨투어 C 내부에 $f_1(s)$ 는 Z_1 개의 영점과 $f_1(s)$개의 극점 그리고 $f_2(s)$는 Z_2개의 영점과 P_2 개의 극점을 갖고 있다고 가정한다. 이 때 다음 관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned} N(0, f(s), C) &= N(0, f_1(s), C) + N(0, f_2(s), C) \\ &= (Z_1 - P_1) + (Z_2 - P_2) \end{aligned}$$

▶ Nyquist 컨투어



개루프 전달함수 $G(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ 로 표시하면

폐루프 시스템의 특성방정식과 극점 다항식은 $1+G(s)=\dfrac{D(s)+N(s)}{D(s)}$

$$1+\frac{N(s)}{D(s)}=0,\qquad \phi_{CL}(s)=D(s)+N(s)=D(s)(1+G(s))=\phi_{OL}(s)(1+G(s))$$

여기서, $\phi_{OL}(s)(=D(s))$ 는 개루프 극점다항식이다.

폐루프 시스템이 안정하기 위해서 폐루프 극점 다항식의 영점이 Nyquist 컨투어 D내부에 존재하면 안된다. 즉 $\phi_{OL}(s)=D(s),\quad N(0,\phi_{OL}(s),D)$

에서 불안정한 개루프 극점의 개수를 P_u 로 둘 때

$$N(0,\phi_{CL}(s),D)=N(0,\phi_{OL}(s)(1+G(s)),D)=0(=Z)$$

$$N(0,\phi_{OL}(s),D)+N(0,1+G(s),D)=P_u+N=Z$$

$$If\quad Z=0\Rightarrow stable,\qquad Z\neq 0\ \Rightarrow unstable$$

즉 $stable$ 인 경우 $N(0,1+G(s),D)=-P_u$ 혹은 $N(-1,G(s),D)=-P_u$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

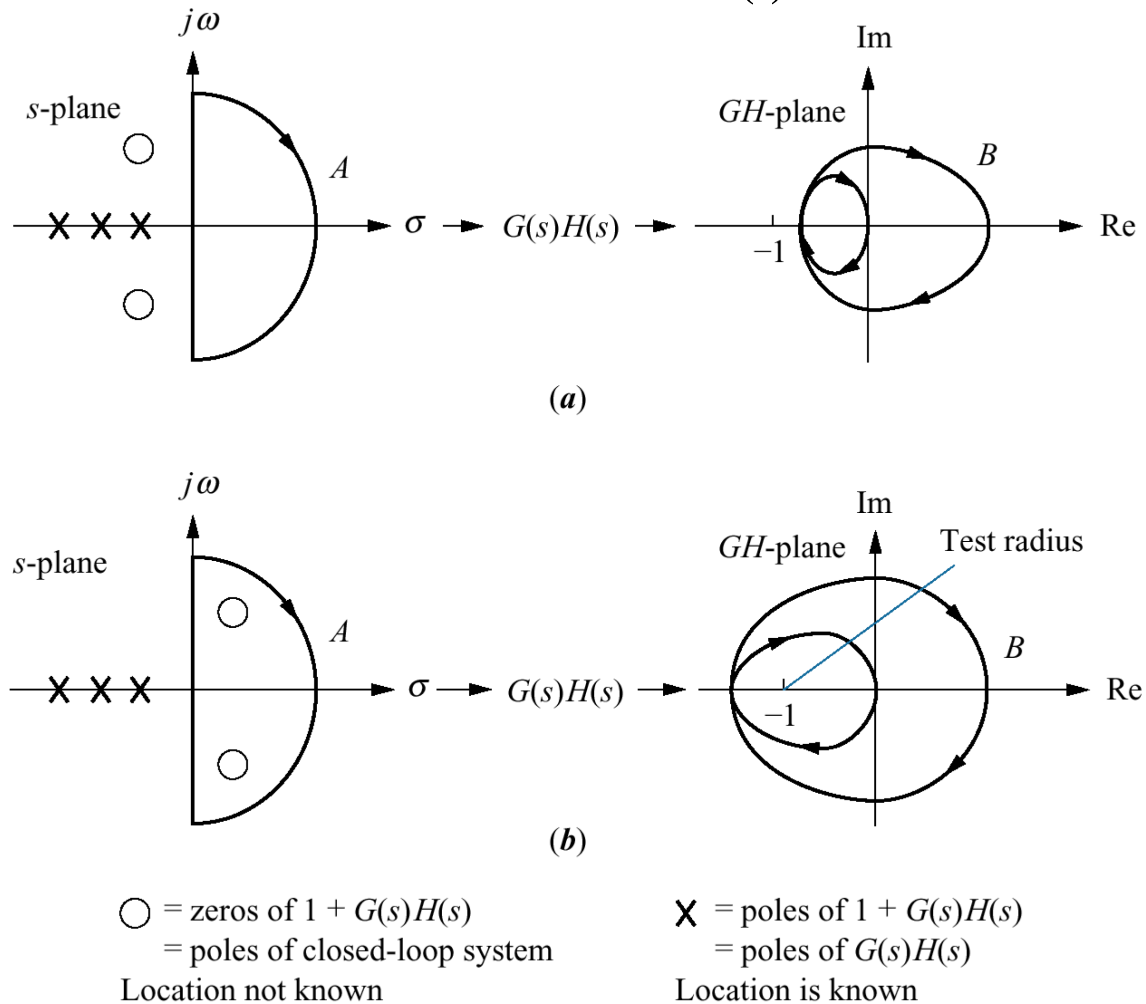
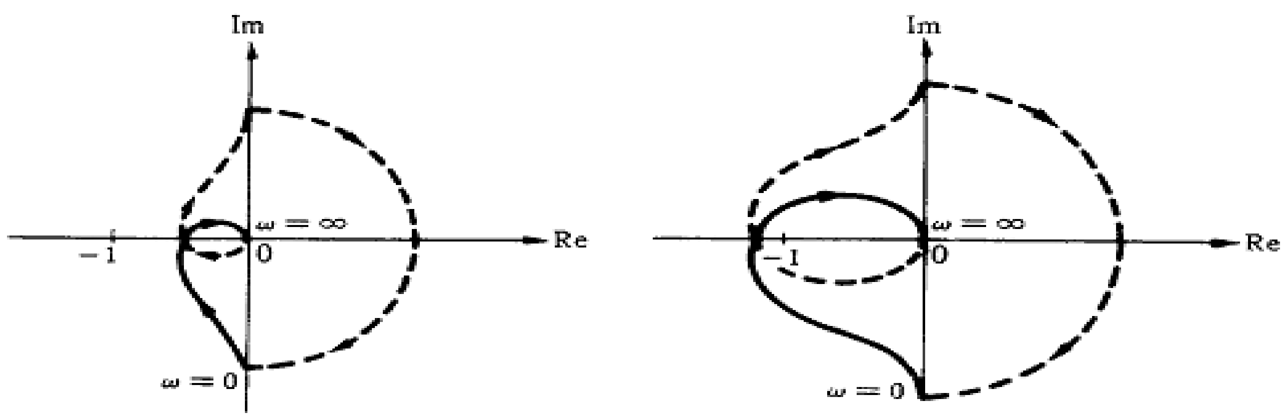


Figure 10.25
Mapping examples:
a. contour does not enclose closed-loop poles;
b. contour does enclose closed-loop poles

$$N(0, 1+G(s), D) = -P_u \quad \text{혹은} \quad N(-1, G(s), D) = -P_u$$

=> Nyquist 안정도 판별을 위한 필요충분조건으로서, 시계방향으로 폐쇄된 Nyquist 컨투어 D를 개루프 전달함수 G(s)로 사상한 상이 임계점 (−1+j0)을 반시계방향으로 둘러싸는 횟수가 불안정한 개루프 극점의 개수와 같으면 폐루프 시스템이 안정하다는 것을 의미한다.

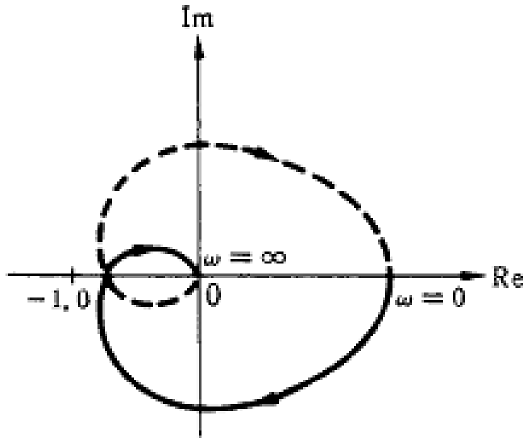


(a) $G(s) = \dfrac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$; $T_1,\ T_2 > 0$

$\left.\begin{matrix} N=0 \\ P_u=0 \end{matrix}\right\}$ 안정한 시스템.

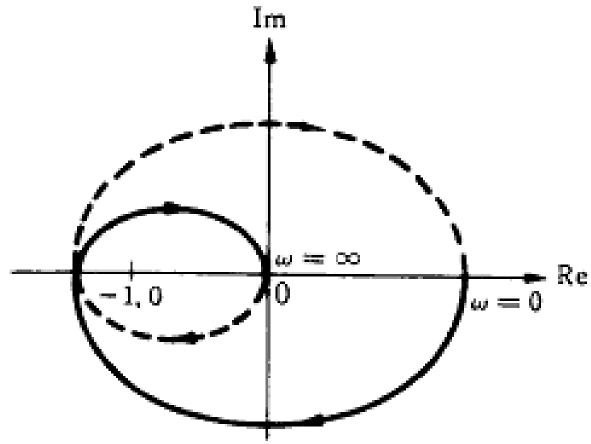
(b) $G(s) = \dfrac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$; $T_1,\ T_2 > 0$

$\left.\begin{matrix} N=2 \\ P_u=0 \end{matrix}\right\}$ 불안정한 시스템.



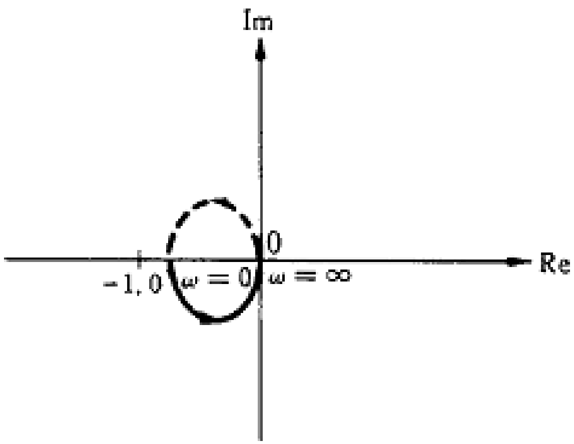
(c) $G(s)=\dfrac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$;

$(T_1,\ T_2,\ T_3>0)$ $\left.\begin{array}{l} N=0 \\ P_u=0 \end{array}\right\}$ 안정한 시스템.



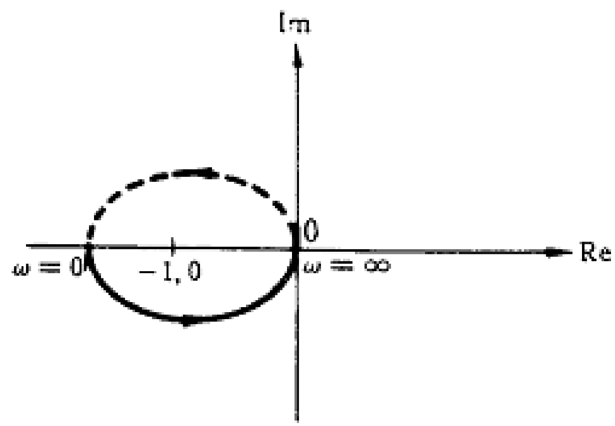
(d) $G(s)=\dfrac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$;

$(T_1, T_2, T_3>0)$ $\left.\begin{array}{l} N=2 \\ P_u=0 \end{array}\right\}$ 불안정한 시스템.



(e) $G(s)=\dfrac{K}{-1+T_1s}$; $T_1>0$

$\left.\begin{array}{l} N=0 \\ P_u=1 \end{array}\right\}$ 불안정한 시스템.



(f) $G(s)=\dfrac{K}{-1+T_1s}$; $T_1>0$

$\left.\begin{array}{l} N=-1 \\ P_u=1 \end{array}\right\}$ 안정한 시스템.

폐루프 극점다항식 $\phi_{CL}(s)$의 영점, 다시 말하면 폐루프 극점이 Nyquist 컨투어 D 내부, 즉 불안정한 영역에 Z개 존재한다.

$$Z = N(0, \phi_{CL}(s), D)$$
$$Z = N(-1, G(s), D) + P_u$$

P_u 는 불안정한 개루프 극점의 개수이다.

- 개루프 극점이 허수축상에 존재할 때 Nyquist 컨투어를 설정하고 Nyquist 선도를 그리는 방법

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

이 경우에는 그림 5.26에 표시된 바와 같이 허수축상에 있는 극점을 우회하는 Nyquist 컨투어를 설정해야 한다.

▶ Nyquist 컨투어

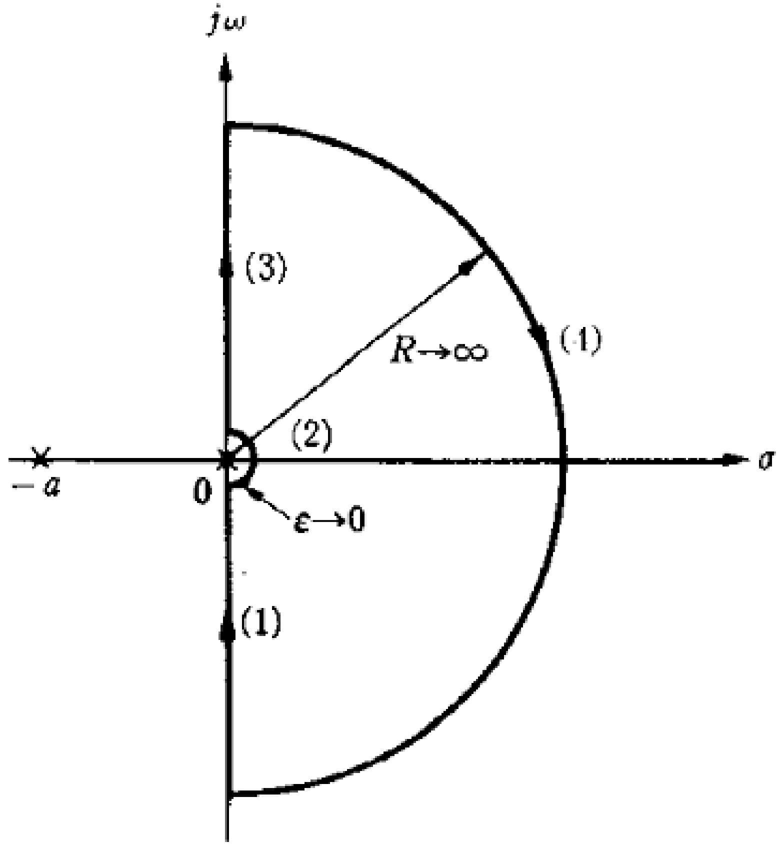


그림 5.26 시스템 $G(s) = \dfrac{K}{s(s+a)}$ 에 대한 Nyquist 컨투어

그림 5.27(a)에 표시되어 있는 확대된 Nyquist 컨투어 부분 2에 대하여 이 부분의 점들은

$$s = \varepsilon e^{j\theta}$$

$$G(s)\Big|_{s=\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta} + a)}$$

$\varepsilon \to 0$ 이므로 위 식을 다음과 같이 간략화 할 수 있다.

$$G(s)\Big|_{s=\varepsilon e^{j\theta}} \simeq \frac{K}{a\varepsilon e^{j\theta}} = \infty e^{-j\theta}$$

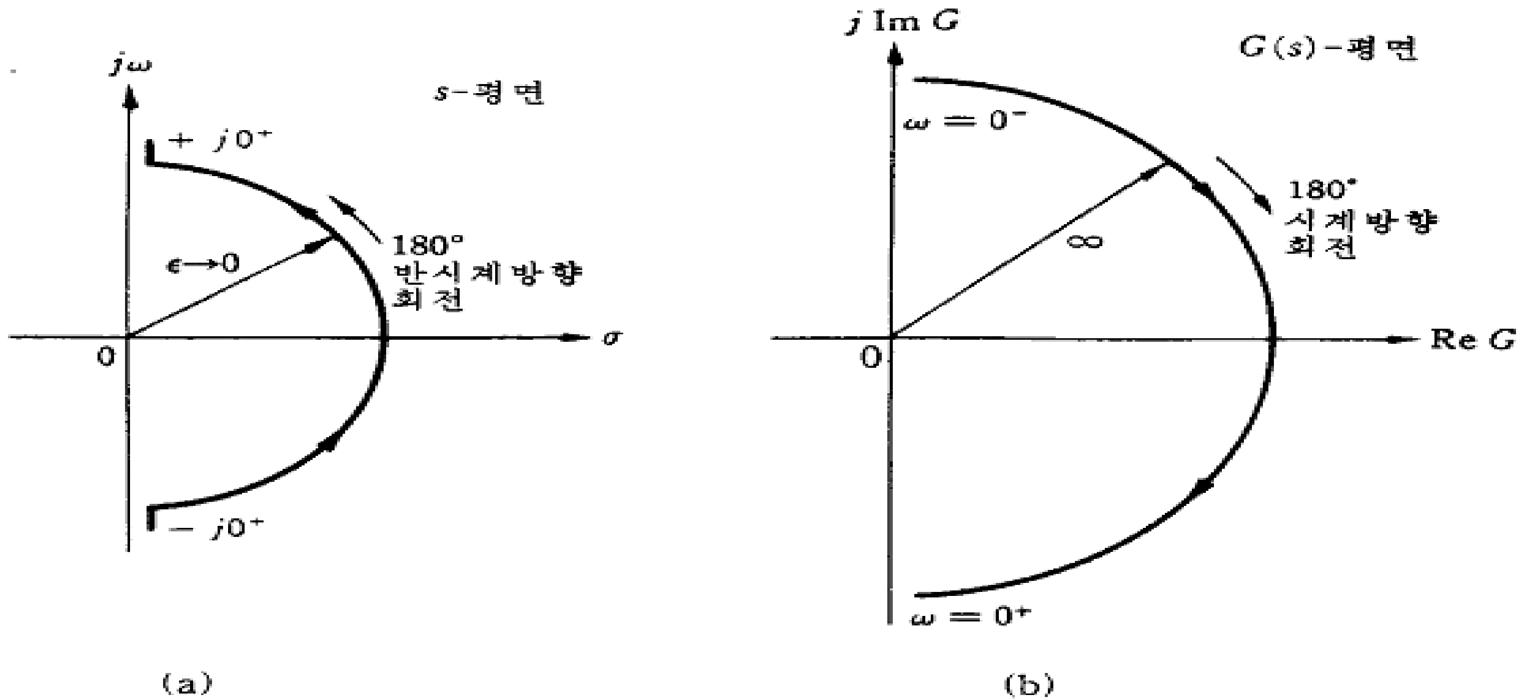


그림 5.27 (a) 그림 5.26의 Nyquist 컨투어의 부분 2,
(b) 부분 2에 대응하는 G(s)의 Nyquist 선도

Nyquist 컨투어의 부분 2에 대응하는 $G(s)$ 의 특성은

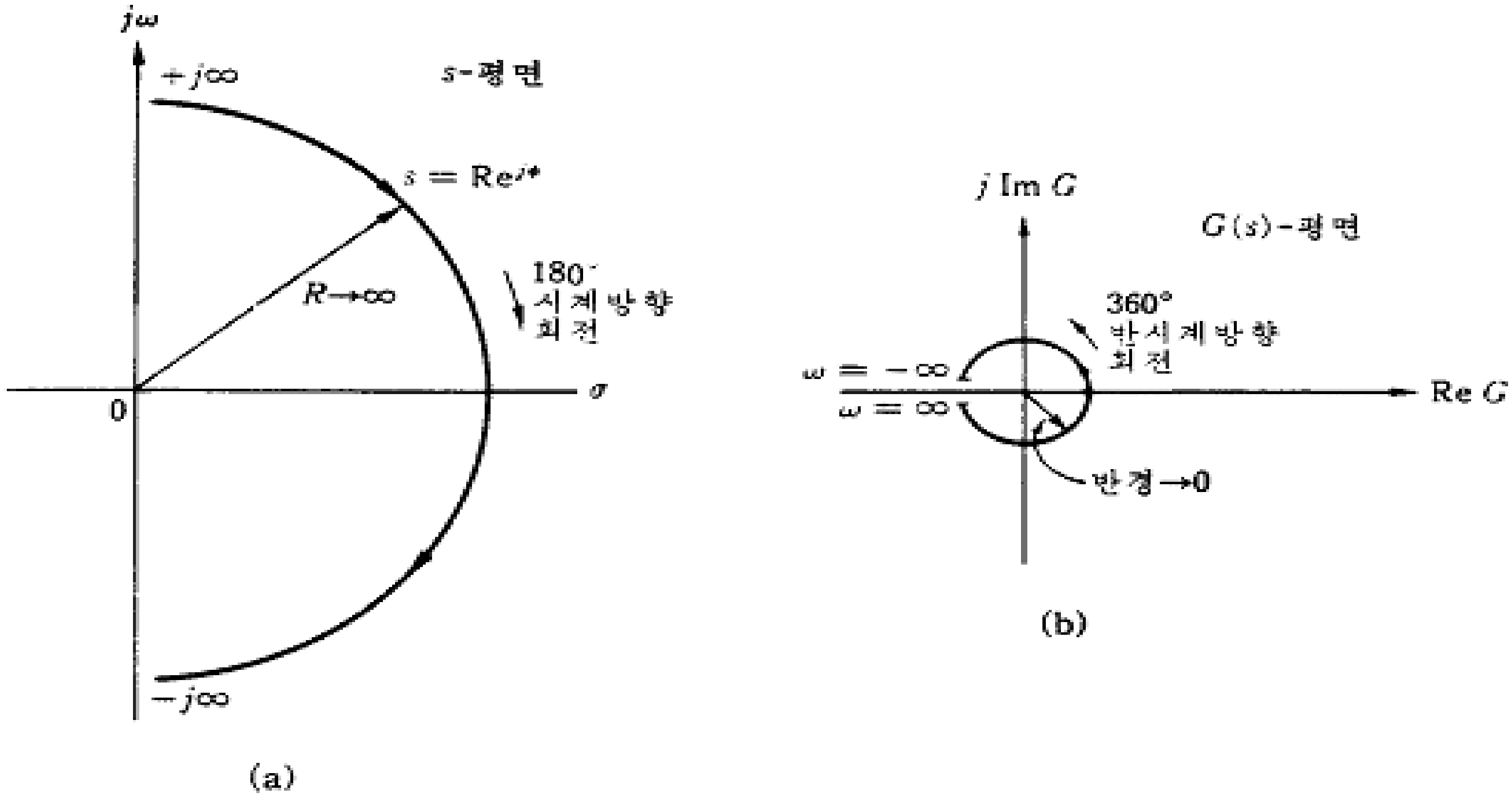
$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s(s+a)} = \lim_{s\to 0} \frac{K}{sa}$$

그림 5.26에 표시된 부분 4에 대한 Nyquist 선도를 그리기 위해 반원상의 점들은 다음과 같은 지수표시식으로 나타낸다.

$$s = \mathrm{Re}^{j\phi}$$

여기서, R→∞이다. 식 (5.76)에 식 (5.81)을 대입하면

$$G(s)\Big|_{s=\mathrm{Re}^{j\phi}} = \frac{K}{R^2 e^{j2\phi}} = 0e^{-j2\phi}$$



5.28 (a) 그림 5.26의 Nyquist 컨투어의 부분 4,
(b) 부분 4에 대응하는 G(s)의 Nyquist 선도

양의 허수축을 따라 움직이는 부분 3에 대한 Nyquist 궤적은

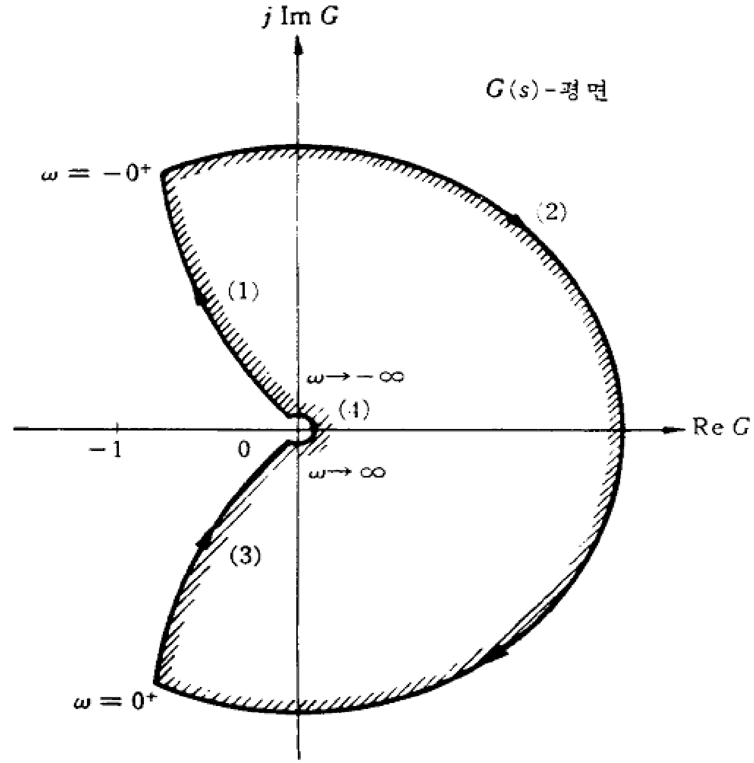
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + a)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K(-\omega^2 - ja\omega)}{\omega^4 + a^2\omega^2}$$

$G(j\omega)$ 가 실수축과 교차하는 주파수는

$$\operatorname{Im} G(j\omega) = \frac{Ka\omega}{\omega^4 + a^2\omega^2} = \frac{-K\omega}{\omega(\omega^2 + a^2\omega^2)} = 0$$

그림 5.29 시스템 $G(s) = \dfrac{K}{s(s+a)}$ 의 Nyquist 선도



폐루프 시스템의 안정도 판별

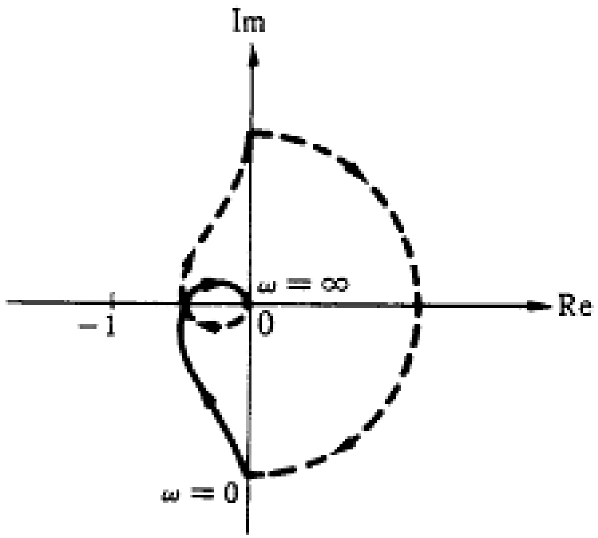
$$N(0, 1+G(s), D) = -P_u$$

$$N(-1, G(s), D\ ) = -P_u$$

불안정한 폐루프 극점의 개수

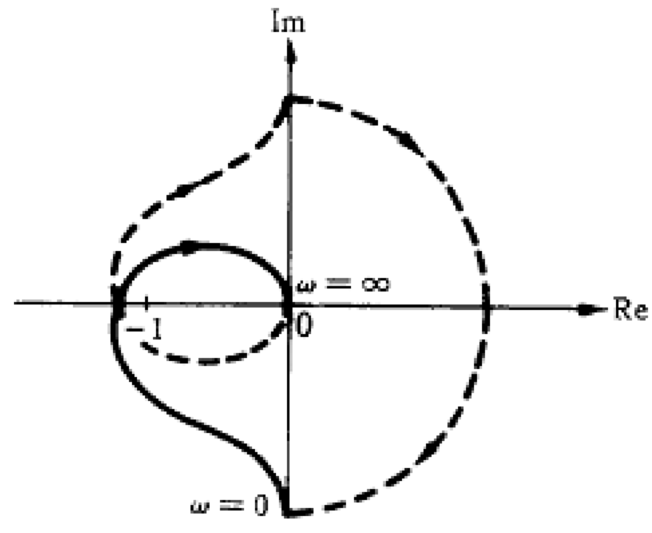
$$Z = N(0, \Phi_{CL}(s), D)$$

$$Z = N(-1, G(s), D) + P_u$$



(a) $G(s) = \dfrac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$; $T_1,\ T_2 > 0$

$\left.\begin{matrix} N=0 \\ P_u=0 \end{matrix}\right\}$ 안정한 시스템.



(b) $G(s) = \dfrac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$; $T_1,\ T_2 > 0$

$\left.\begin{matrix} N=2 \\ P_u=0 \end{matrix}\right\}$ 불안정한 시스템.

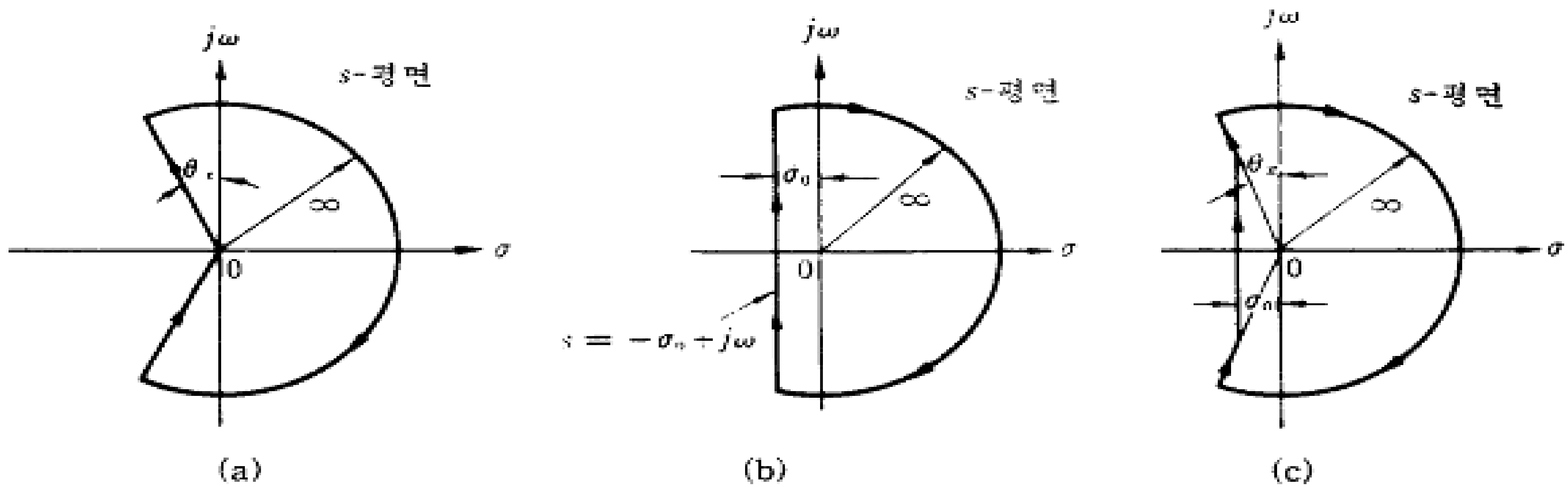


그림 5.30 수정된 Nyquist 컨투어

그림 5.30(a):

$(-1+j0)$ 을 둘러싸는 횟수 = $G(s)$ 의 극점의 개수

=> 폐루프 시스템은 $\zeta_x (= \sin\theta_x)$ 보다 큰 감쇠비를 갖는 안정한 시스템

그림 5.30(b):

$(-1+j0)$을 둘러싸는 횟수 = $G(s)$ 의 극점의 개수
폐루프 극점의 실수부가 $-\sigma_0$ 보다 작게 되어 폐루프 시스템의 시정수가 적어도 $1/\sigma_0$ 보다 작다.

그림 5.30(c):
시험결과 Nyquist 안정도 판별조건을 만족한다면 모든 폐루프 극점은 ζ_x 보다 큰 감쇠비를 가지며 시정수는 $1/\sigma_0$ 보다 작다는 것을 알 수 있다.

[예제 5.2] Nyquist 안정도 판별법을 이용하여 개루프 전달함수 G(s)가 다음과 같이 시간지연 요소를 포함하는 시스템에 대하여 안정한 K의 임계값을 구하기로 한다.

$$G(s) = \frac{Ke^{-s}}{s+1}$$

$sol)$

$$G(j\omega) = \frac{Ke^{-j\omega}}{j\omega+1} = \frac{K(\cos\omega - j\sin\omega)(j - j\omega)}{1+\omega^2}$$

$$= \frac{K}{1+\omega^2}\{(\cos\omega - \omega\sin\omega) - j(\sin\omega + \omega\cos\omega)\}$$

안정한계점이 $(1+ j0)$ 이므로 안정한계에서의 주파수 ω_m 을 찾기 위하여 $G(j\omega_m)$ 의 허수부를 0으로 한다. 즉,

$$\sin\omega_m + \omega_m \cos\omega_m = 0$$

$$\omega_m = -\tan\omega_m$$

위 식을 만족하는 주파수 $\omega_m = 2.029 \ rad/\sec$ 이다.
안정한계에서의 주파수 ω_m 에서 주파수 전달함수 $G(j\omega_m)$ 의 실수부를 −1로 하면,

$$\mathrm{Re}[G(j2.029)] = \frac{K}{1+2.029^2}(\cos 2.029 - 2.029\sin 2.029)$$
$$= -1$$

혹은, K=2.262

다음의 그림은 안정한계에 있는 시간지연 요소(T_D = 1초)를 고려한 시스템

$\frac{2.262e^{-j\omega}}{1+j\omega}$ 그리고 시간지연을 무시한 시스템 $\frac{2.262}{1+j\omega}$ 의 Nyquist 선도.

시간지연을 무시한 시스템은 1차 시스템으로서 반원의 형상을 하고, 시간지연을 고려한 1차 시스템은 나선형 모양을 하고 있다. 그리고 시간지연을 무시한 1차 시스템은 모든 K값에 대해 안정하지만, 시간지연 요소(TD = 1초)를 고려한 1차 시스템은 K > 2.262일 때 불안정하다.

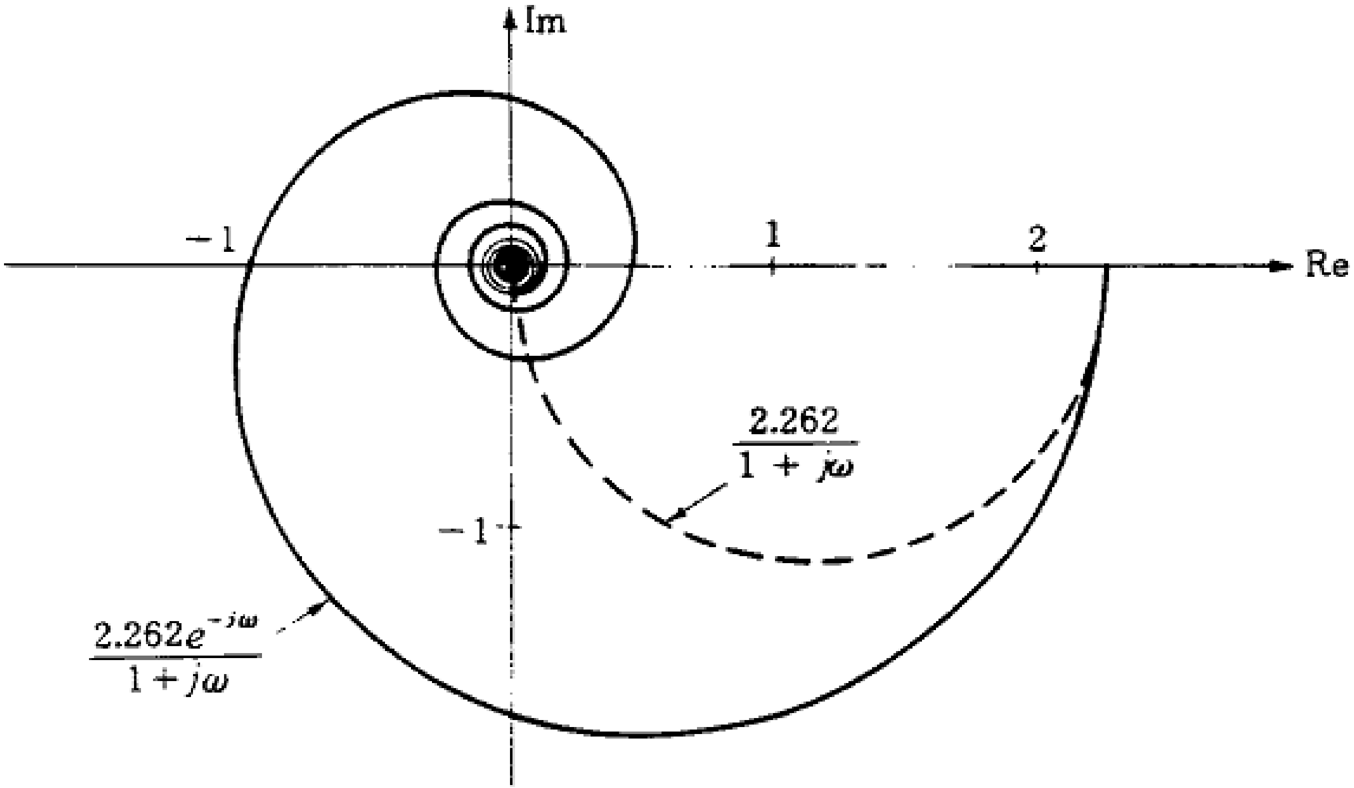
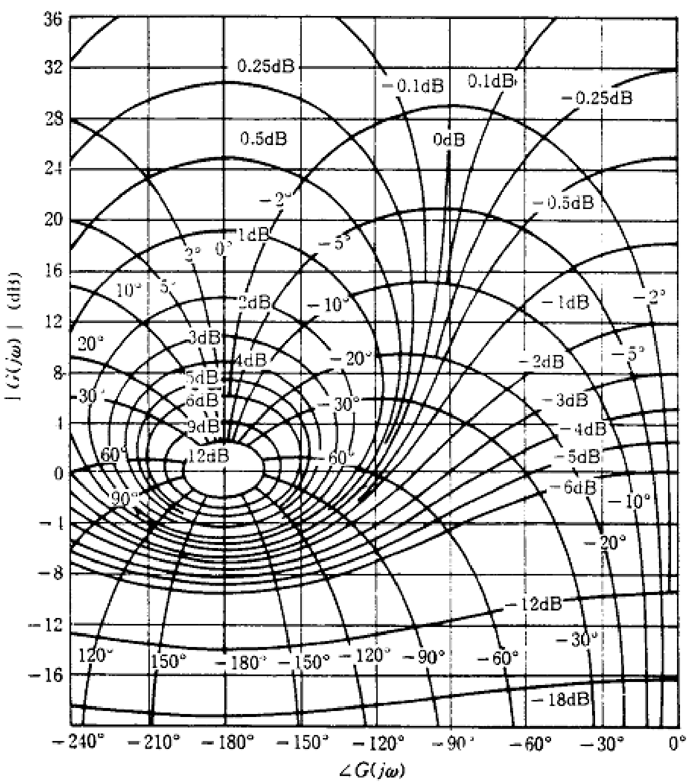


그림 5.31 $\dfrac{2.262e^{-j\omega}}{1+j\omega}$ 와 $\dfrac{2.262}{1+j\omega}$ 의 Nyquist 선도

5.7 Nichols 선도

Nichols 선도: 개루프 전달함수 G(jω)의 위상 대 log 크기를 하나의 선도에 나타내어 주파수응답 특성을 도해적으로 나타내는 방법이다. Nichols 선도를 이용하면 게인의 변화 혹은 제어기의 첨가에 따른 폐루프 시스템의 주파수역 성능인 시스템의 대역폭, 공진주파수, 상대안정도 등을 신속하게 알 수 있다.



[예제 5.3] 시스템의 개루프 전달함수 G(s) 가 다음과 같을 때 폐루프 시스템의 공진최대값 M_r 와 공진주파수 ω_r 를 구하기로 한다.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

G(jω) 궤적이 M= 5dB 궤적에 접하고 있으므로 폐루프 주파수응답의 공진최대값 M_r 는 5dB이고, 이 때 공진주파수 ω_r 는 0.8 rad/sec 이다

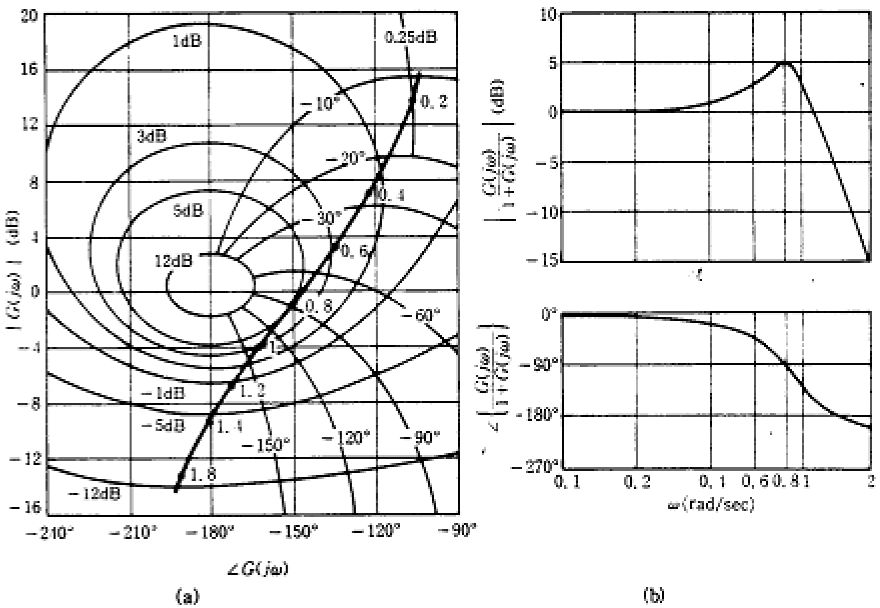


그림 5.34 (a) Nichols 선도 위에 겹쳐진 G(jω)의 작도,
(b) 폐루프 주파수응답 곡선

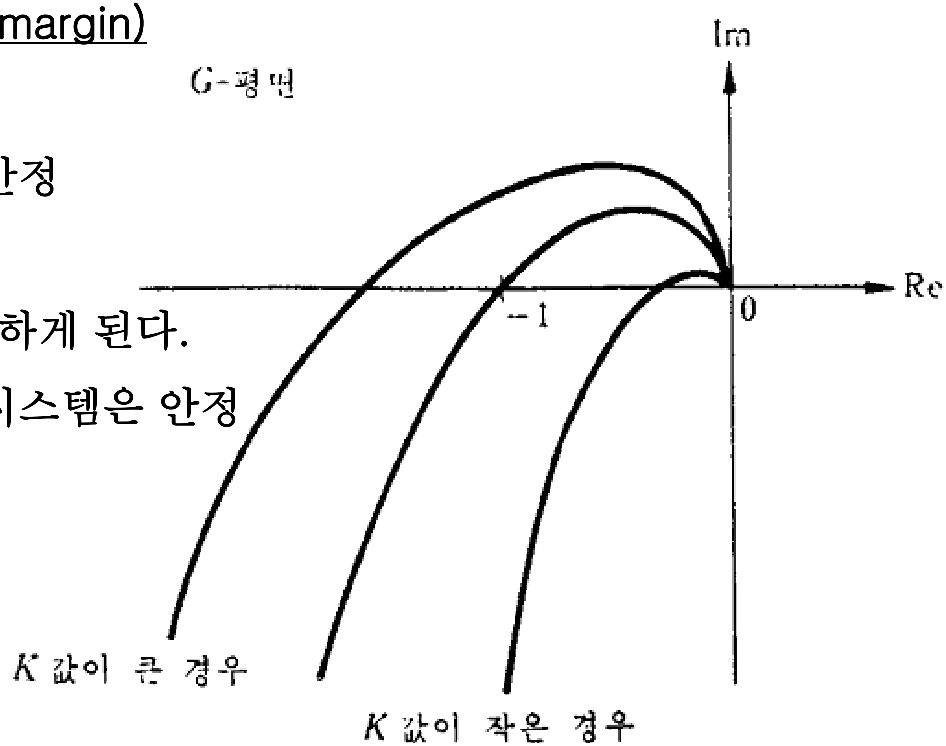
10.6 Gain Margin and Phase Margin via the Nyquist Diagram

▶ 제어시스템 설계시 모델의 불확실성을 고려 => 상대안정도

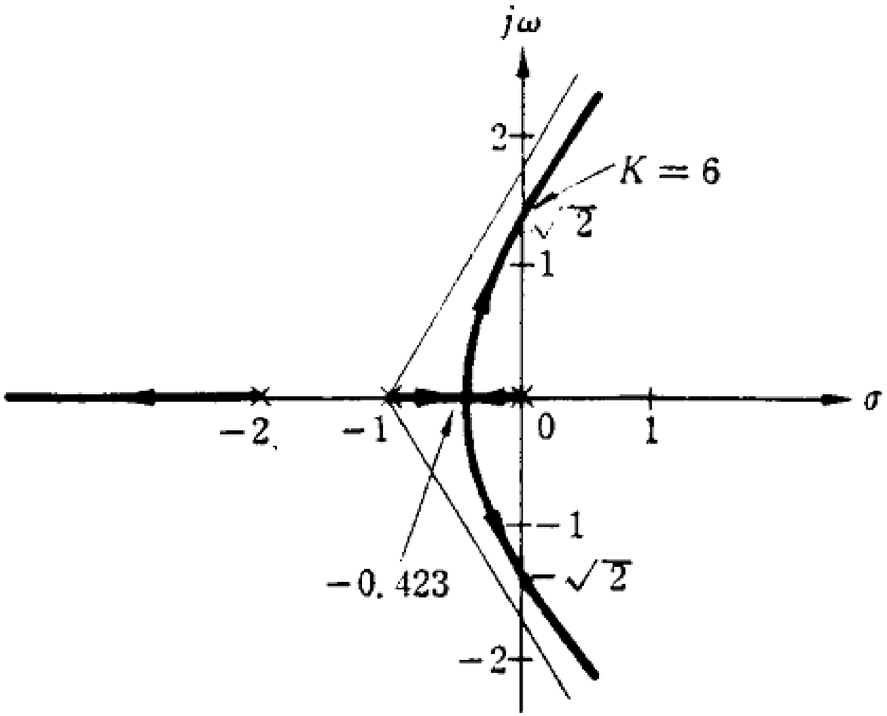
단일입출력 시스템:

게인여유(gain margin)와 위상여유(phase margin)

- 게인 K가 크면 공칭 폐루프 시스템은 불안정
- 게인이 감소하여 어떤 일정한 값이 되면 $G(j\omega)$ 의 궤적이 임계점 (−1+j0)을 통과하게 된다.
- 게인 K값이 이보다 작으면 공칭 폐루프 시스템은 안정



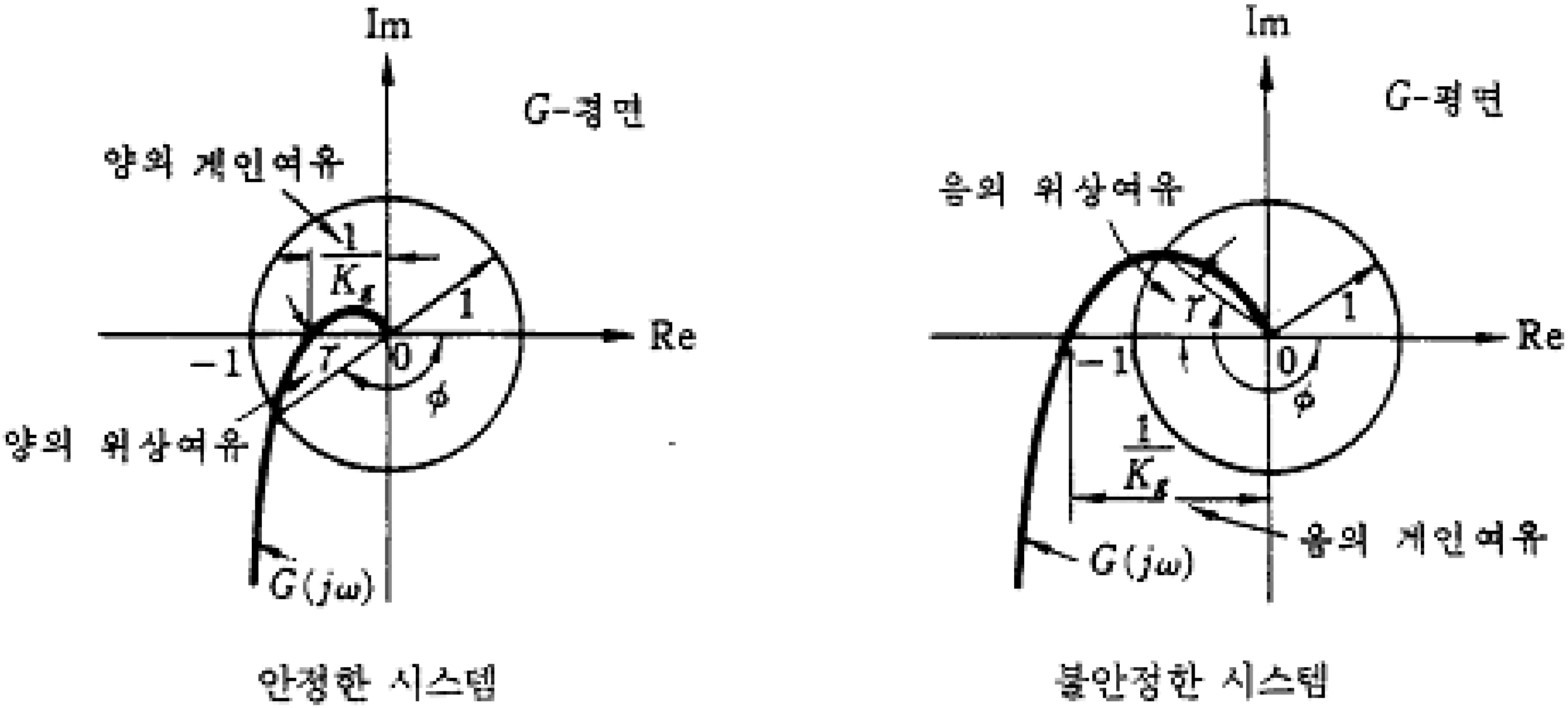
$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



5.8 상대안정도

▶ 게인여유 K_g $$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_p)|}$$ 혹은, $$K_g = -20\log|G(j\omega_p)|\ dB$$

▶ 위상여유 γ $$\gamma = \phi(\omega_g) + 180^\circ$$



(a)

▶ 게인여유 K_g

$\angle G(j\omega)$ 가 -180^{o} 되는 주파수에서 개루프 전달함수의 크기 $G(j\omega)$ 의 역수로 정의
위상교차주파수 ω_p 라고 하면, 이 때 게인여유 K_g 는

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_p)|} \text{ 혹은, } K_g = -20\log|G(j\omega_p)|\, dB$$

▶ 위상여유

게인교차주파수 ω_g 에서 공칭 폐루프 시스템이 불안정한 경계에 이를 때까지 추가될 수 있는 위상지연에 대한 여유

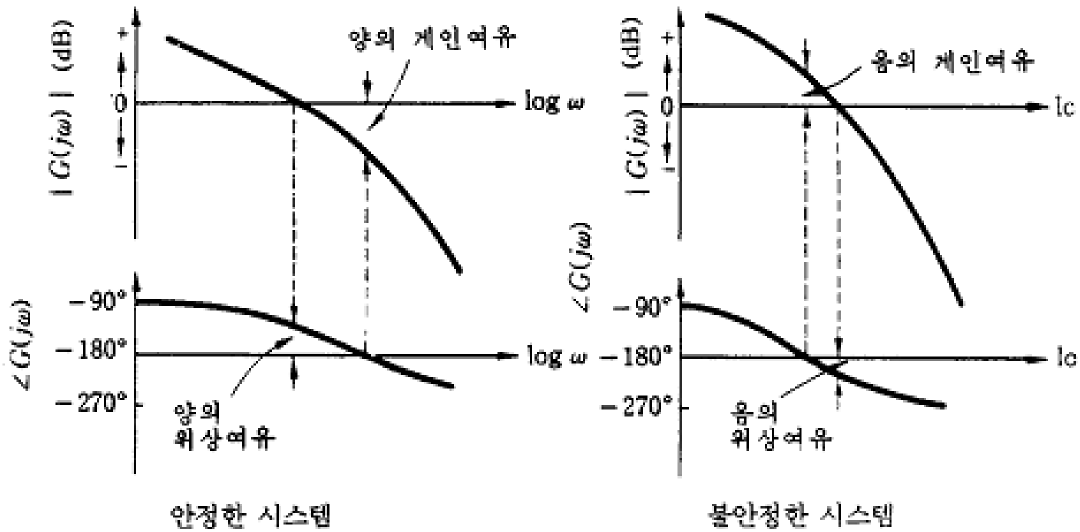
게인교차주파수 ω_g 는 개루프 전달함수의 크기 $G(j\omega)$ 가 1일 때의 주파수이며, 위상여유 γ는

$$\gamma = \phi(\omega_g) - (-180^{\circ})$$

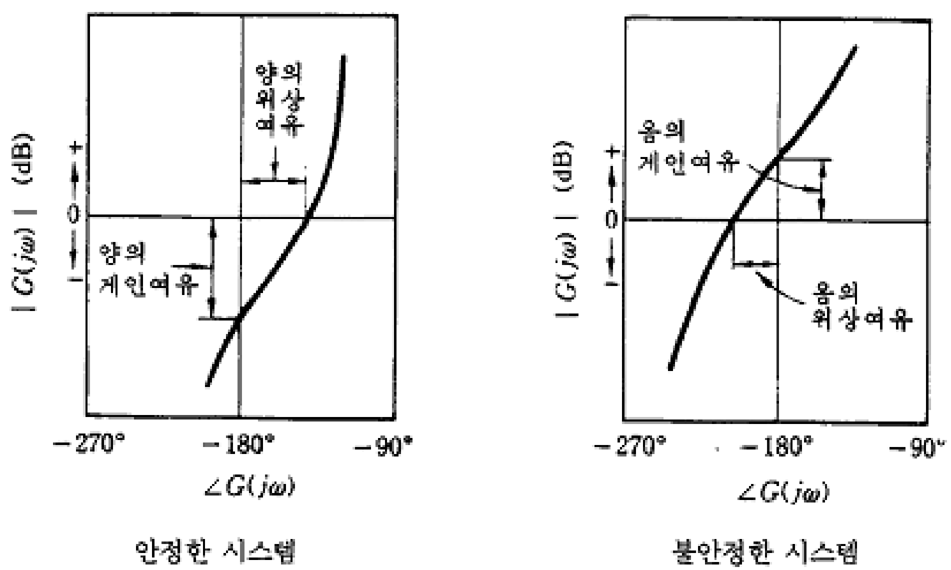
▶ 개루프 시스템이 최소위상 시스템(minimum phase system), 즉 우반 s-평면에 극점이나 영점이 없는 시스템인 경우에 대한 폐루프 시스템이 안정하기 위해서는

$$K_g > 1 \quad or \quad K_g\big|_{dB} > 0 \qquad \text{and} \qquad \gamma > 0^{\circ}$$

1차 시스템이나 2차 시스템 => 게인여유 K_g 는 ∞
1차 또는 2차 시스템의 모델링 오차 중 시간지연이 있을 경우 1차 시스템이나 2차 시스템도 불안정하게 될 수 있다.



(b)



(c)

그림 5.36 폐루프 시스템이 안정한 경우와 불안정한 경우에 대한 주파수응답곡선 형태

예) 아래의 개루프 시스템 G(s)에 대하여 생각하기로 한다.

$$G(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s\left(s + 2\zeta\omega_n\right)}$$

이 경우 단위 피드백을 사용한 폐루프 시스템 T(s)는

$$T(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$$

감쇠비 ζ 와 위상여유 γ 사이의 관계는 ?

$\left|G(j\omega_g)\right| = 1$ 인 게인교차주파수 ω_g 를 구한다.

$$\left|G(j\omega_g)\right| = \frac{\omega_n^{\ 2}}{\omega_g\sqrt{\omega_g^{\ 2} + 2\zeta\omega_n^{\ 2}}} = 1$$

혹은

$$\omega_g = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}$$

이 때 위상여유 γ 는 다음과 같이 계산된다

$$\gamma = \angle G(j\omega_g) - (-180^\circ) = 180^\circ + \angle \frac{1}{j\omega_g} + \angle \frac{1}{j\omega_g + 2\zeta\omega_n}$$

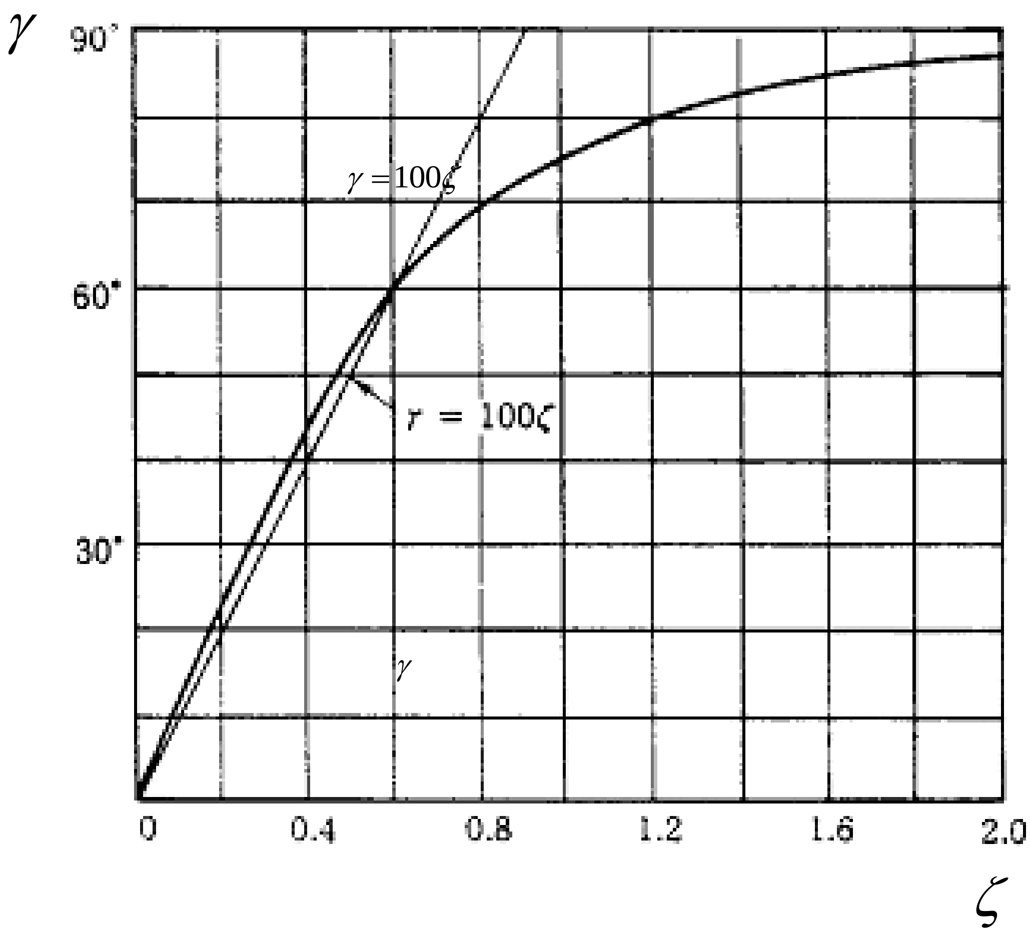
$$= 180^\circ - 90^\circ - \tan^{-1}\frac{\omega_g}{2\zeta\omega_n}$$

$$= 90^\circ - \tan^{-1}\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}$$

폐루프 시스템 T(s)

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



$$\gamma = 100\zeta$$

그림 5.37 감쇠비 ζ값에 따른 2차 시스템의 위상여유

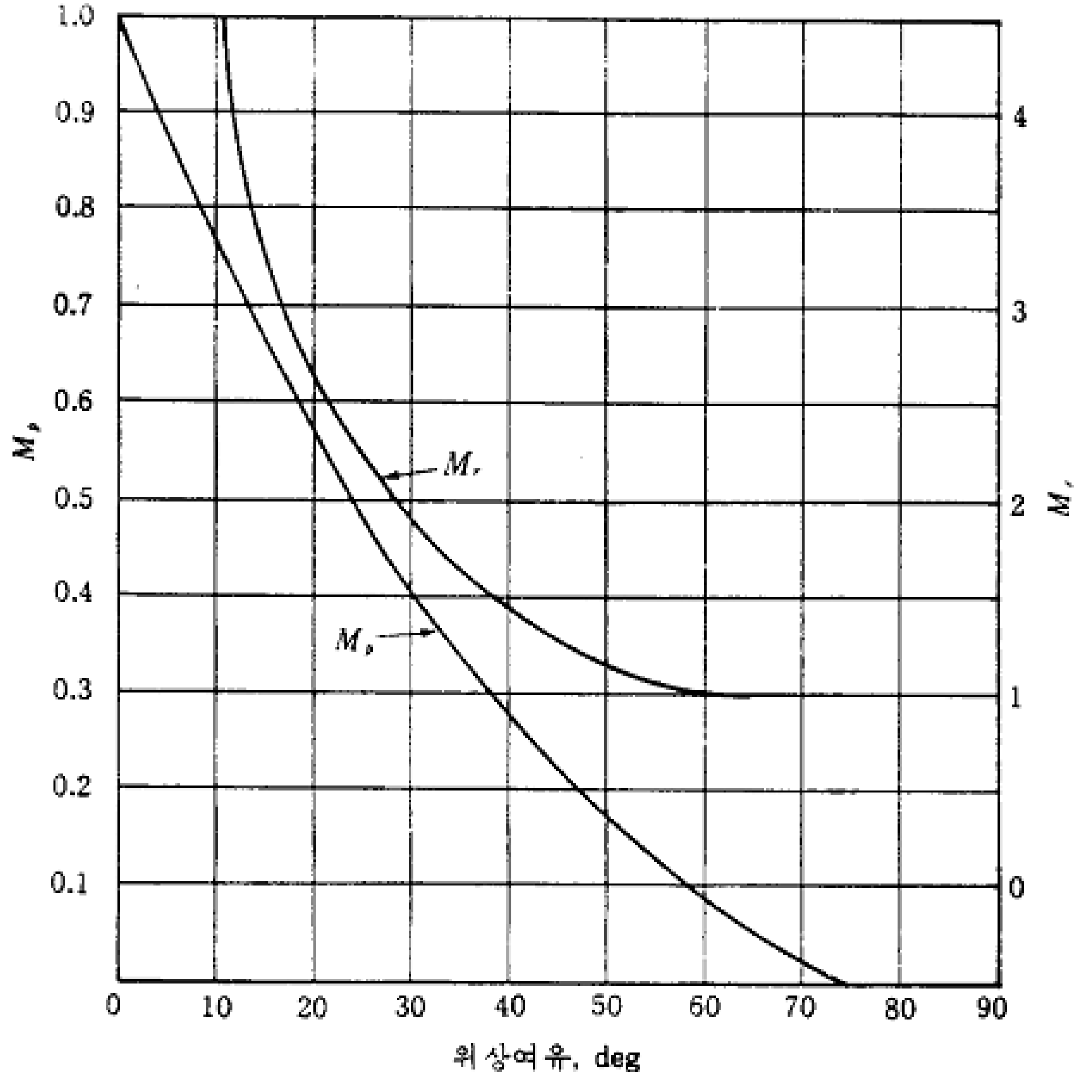


그림 5.38 2차 시스템의 위상여유 γ값에 따른
최대오버슈트량 M_p와 공진최대값 M_r

벡터여유(vector margin)

벡터여유 α_{min}은 임계점 (-1+ j 0)에서 가장 가까운 Nyquist 궤적까지의 거리로 정의

$$\alpha_{\min} = \min_{\omega} |1 + G(j\omega)| = \min_{\omega} \frac{1}{|S(j\omega)|} = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|}$$

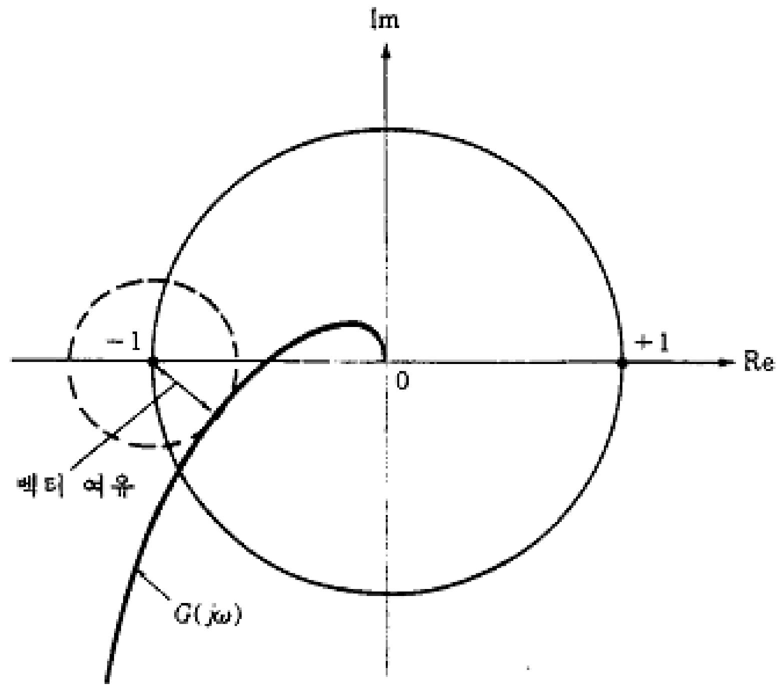


그림 5.41 Nyquist 선도에서 벡터여유의 정의

[예제 5.7] MATLAB을 이용하여 다음 전달함수 G(s)의 Nyquist 선도를 그리기로 한다.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1.2s + 1}$$

MATLAB 프로그램 5.7

```
num =[1];
den = [1 1.2 1];
nyquist(num,den)
v = [-1 2 -2 2]; axis(v)
grid
title('Nyquist plot of G(s) = 1/(s^2+1.2s+1)')
```

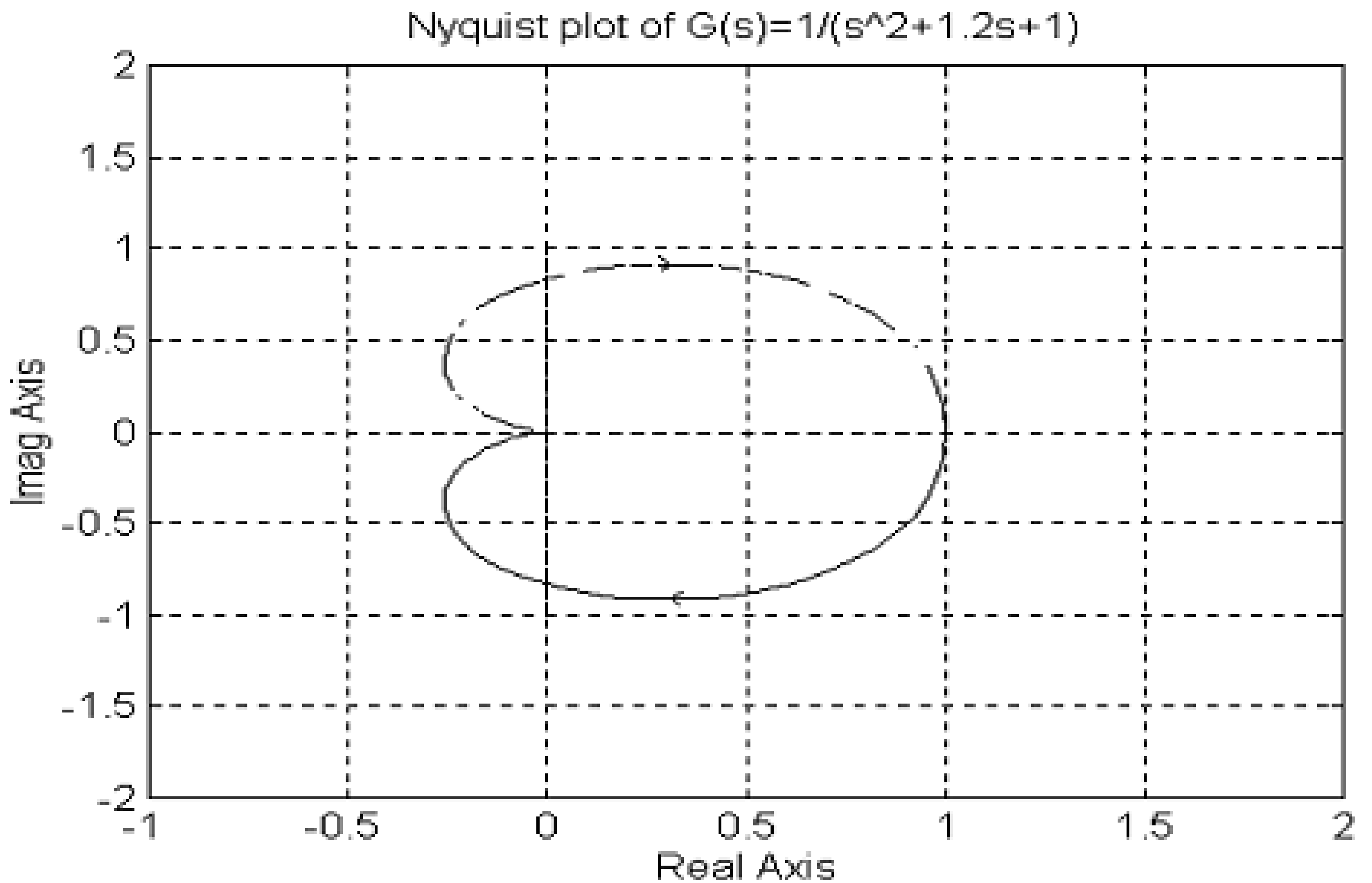


그림 5.48 $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 1.2s + 1}$ 의 Nyquist 선도

[예제 5.9] MATLAB을 이용하여 다음 전달함수 G(s)의 Nichols 선도를 그리기로 한다.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.2s+1)}$$

MATLAB 프로그램 5.10

```
num = [1];
den = [0.2 1.2 1 0];
w = logspace(-1,1,400);
nichols(num,den,w)
axis([-210, 0, -24, 36 ])
ngrid
title('Nichols plot of G(s)=1/s(s+1)(0.2s+1)')
```

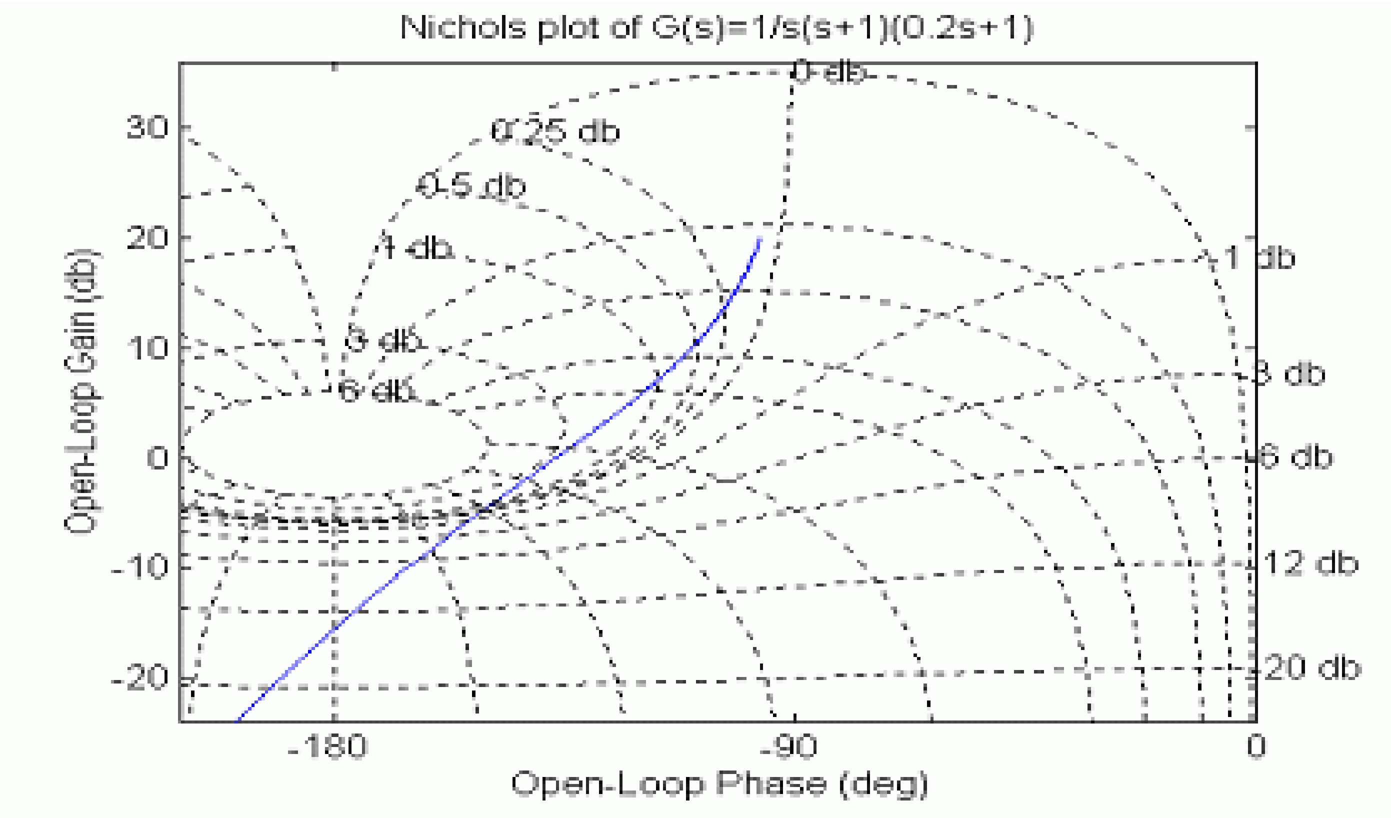


그림 5.51 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(0.2s+1)}$ 의 Nichols 선도

[예제 5.10] MATLAB을 이용하여 개루프 전달함수 G(s)에 대한 Bode 선도를 그리고 상대안정도 및 주파수역 성능을 평가하기로 한다

$$G(s) = \frac{0.5}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5}$$

MATLAB 프로그램 5.11
num=[0.5] den=[1 2 1 0.5] w=logspace(-1, 1, 200) margin(num, den)

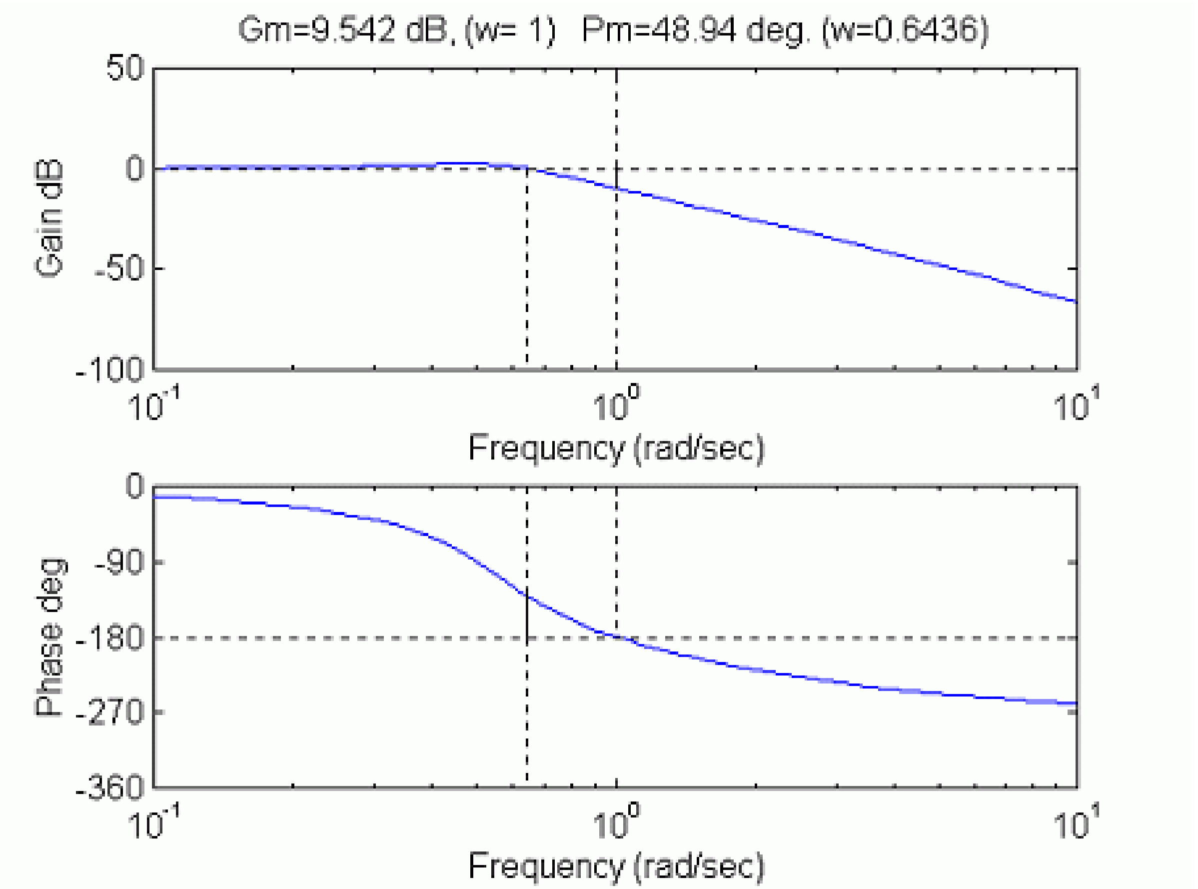


그림 5.52 $G(s)=\dfrac{0.5}{s^3+2s^2+s+0.5}$ 의 Bode 선도