



정답

1. ⑤	2. ①	3. ①	4. ②	5. ②
6. ③	7. ①	8. ④	9. ③	10. ②
11. ④	12. ②	13. ③	14. ⑤	15. ④
16. ④	17. ③	18. 41	19. 6	20. 15
21. 14	22. 21	23. 19	24. 17	25. 20
[미분과 적분]				
26. ③	27. ②	28. ④	29. ⑤	30. 64
[학률과 통계]				
26. ③	27. ④	28. ②	29. ⑤	30. 157
[이산 수학]				
26. ①	27. ⑤	28. ③	29. ⑤	30. 89

해설

1. 지수와 로그의 계산

$$27^{\frac{1}{3}} + \log_2 4 = (3^3)^{\frac{1}{3}} + \log_2 2^2 = 3 + 2 = 5$$

2. 행렬의 계산

$$A = 3E \text{ 이므로}$$

$$AB + 2B = (A + 2E)B = 5EB = 5B = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

따라서, 구하는 성분의 합은 10이다.

3. 함수의 극한

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+a} - b) = 0 \text{ 에서}$$

$$b = \sqrt{3+a} \cdots \textcircled{1}$$

$$(\text{주어진 식}) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{3+a}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3+a}}$$

$$\therefore \frac{1}{2\sqrt{3+a}} = \frac{1}{4} \text{ 에서, } a = 1$$

$$\textcircled{1} \text{ 에서 } b = 2$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

4. 이차곡선

점 $P(a, b)$ 에서의 접선의

방정식은

$$by = 2(x+a)$$

$$\therefore Q(-a, 0)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{4a^2 + b^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore 4a^2 + b^2 = 80 \cdots \textcircled{1}$$

점 P 는 포물선 위의 점이므로,

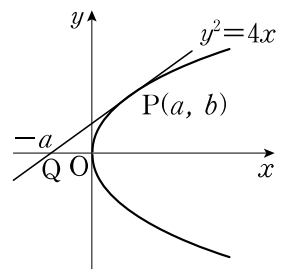
$$b^2 = 4a \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } a^2 + a - 20 = 0, (a+5)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

$$\therefore b^2 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 16 + 16 = 32$$



5. 공간도형

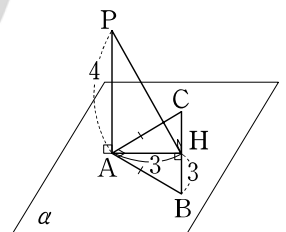
점 P 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면

$\overline{PA} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AH} \perp \overline{BC}$$

$$\therefore \overline{PA} = 4,$$

$$\overline{AH} = 3 \text{ 이므로 } \overline{PH} = 5$$



6. 경우의 수

먼저 A, B와 같이 처리할 업무 두 가지를 고르는 방법은 ${}_4C_2$ (가지)이다. A, B가 들어갈 두 자리를 고르면 앞에는 A, 뒤에는 B가 들어간다. 나머지 두 업무는 임의로 배치할 수 있다.

따라서, 구하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_4C_2 \times 2! = 72(\text{가지})$$

7. 확률

전자우편에 '여행'이라는 단어가 포함된 사건을 A, 광고

인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$ 이다.

	A	A^c
B	0.1×0.5	0.9×0.2
B^c	0.1×0.5	0.9×0.8

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}$$

$$= \frac{0.1 \times 0.5}{0.1 \times 0.5 + 0.9 \times 0.2} = \frac{5}{23}$$

8. 함수의 극한

$ax^2 + 2(a-2)x - (a-2) = 0$ 에서

(i) $a = 0$ 일 때, $-4x + 2 = 0$, $x = \frac{1}{2}$

$\therefore f(0) = 1$

(ii) $a \neq 0$ 일 때,

$$D/4 = (a-2)^2 + a(a-2) = 2(a-2)(a-1)$$

· $a = 1$ 또는 2일 때 중근이므로

$$f(1) = f(2) = 1$$

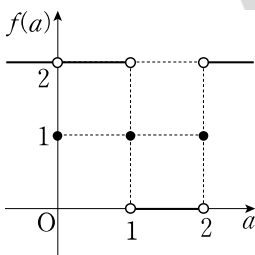
· $1 < a < 2$ 일 때, 허근이므로

$$f(a) = 0$$

· $a < 1$ 또는 $a > 2$ 일 때, 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$f(a) = 2$$

i), ii)에서 그래프를 그려보면



$$\neg. \lim_{a \rightarrow 0} f(a) = 2, f(0) = 1 \quad \therefore \lim_{a \rightarrow 0} f(a) \neq f(0)$$

$\therefore$ 거짓

$$\neg. \lim_{a \rightarrow c+0} f(a) \neq \lim_{a \rightarrow c-0} f(a) \text{인 실수 } c \text{는 } 1 \text{과 } 2 \text{로서}$$

2개이다. $\therefore$ 참

ㄷ. 함수 $f(a)$ 는 $a = 0, 1, 2$ 에서 불연속이다. $\therefore$ 참
따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

9. 통계

생산되는 병의 내압강도를 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다.

$$\frac{m-40}{3\sigma} = 0.8 \text{이므로 } \frac{40-m}{\sigma} = -2.4$$

임의로 추출한 한 개의 병이 불량품일 확률은

$$P(X \leq 40) = P\left(Z \leq \frac{40-m}{\sigma}\right)$$

$$= P(Z \leq -2.4)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.4)$$

$$= 0.5 - 0.4918 = 0.0082$$

10. 지수의 활용

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{0.01 \times 20^{1.25} \times 8^{0.25}}{0.05 \times 20^{0.75} \times 8^{0.30}} = \frac{20^{0.50}}{5 \times 8^{0.05}}$$

$$= 2^{0.85} \times 5^{-0.50}$$

$$\therefore a + b = 0.85 + (-0.50) = 0.35$$

11. 분수방정식

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x) + g(x)}{f(x) \cdot g(x)} \text{에서}$$

$$\{f(x) + g(x)\} \left\{1 - \frac{1}{f(x) \cdot g(x)}\right\} = 0$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 0 \text{ 또는 } f(x) \cdot g(x) = 1$$

(단, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$)

$$f(x) + g(x) = 0 \text{이면 } f(x) = -g(x)$$

$$f(x) \cdot g(x) = 1 \text{이면 } f(x) = \frac{1}{g(x)} (\because g(x) \neq 0)$$

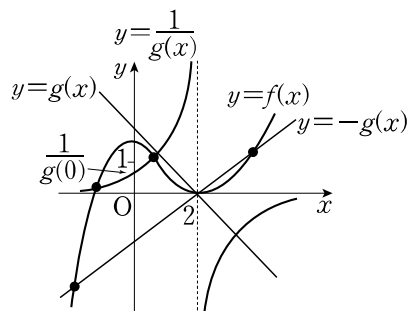
$$y = g(x) \text{가 } (2, 0) \text{을 지나므로 } g(x) = m(x-2) \text{ } (m < 0)$$

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m(x-2)} \text{이고 } g(0) > 1 \text{이므로}$$

$$0 < \frac{1}{g(0)} < 1$$

따라서, $y = f(x)$, $y = -g(x)$, $y = \frac{1}{g(x)}$ 의 그래프를

그리면 다음과 같다.



그림에서 구하는 실근의 개수는 4개이다.

[다른 풀이]

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x) + g(x)}{f(x)g(x)} \text{에서}$$

$$\{f(x) + g(x)\} \left\{ 1 - \frac{1}{f(x) \cdot g(x)} \right\} = 0$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 0 \text{ 또는 } f(x) \cdot g(x) = 1$$

(단, $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$)

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - 2)^2, g(x) = m(x - 2) \text{라 하면}$$

$$(a > 0, m < 0)$$

$$f(0) = -4a\alpha > 1, g(0) = -2m > 1$$

$$\text{i) } f(x) + g(x) = a(x - \alpha)(x - 2)^2 + m(x - 2) \\ = (x - 2)\{a(x - \alpha)(x - 2) + m\} \text{에서}$$

$$h(x) = a(x - \alpha)(x - 2) + m \text{이라 하면}$$

$$a > 0, h(2) = m < 0, h(\alpha) = m < 0 \text{이므로}$$

$h(x) = 0$ 은 $x < \alpha$ 인 근 하나, $x > 2$ 인 근을 하나 가진다.

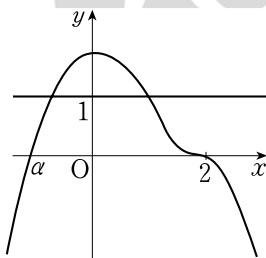
$$\therefore f(x) + g(x) = 0 \text{은 } x < \alpha \text{인 근 하나, } x = 2, \\ x > 2 \text{인 근 하나를 가진다.}$$

$$\text{ii) } f(x) \cdot g(x) = am(x - \alpha)(x - 2)^3 \text{에서}$$

$$i(x) = am(x - \alpha)(x - 2)^3 \text{이라 하면}$$

$$i(\alpha) = 0, i(2) = 0, i(0) = f(0) \cdot g(0) > 1$$

$$\therefore i(x) = 1 \text{은 } \alpha < x < 2 \text{에서 두 개의 근을 가진다.}$$



$\therefore$ i), ii)에서 주어진 방정식은 $x < -\alpha$ 인 근 하나, $\alpha < x < 2$ 인 근 두 개, $x = 2, x > 2$ 인 근을 하나 가지고, 이중 $x = 2$ 는 주어진 식의 분모를 0으로 하므로 근이 아니다.(무연근)

$\therefore$ 모두 4개의 근을 가진다.

12. 수학적 귀납법

$$(가) \frac{m+1}{m+5} C_0 = \boxed{1}$$

$$(나) \frac{l+1}{l+5} C_{k+1} = \frac{(l+1)!}{(k+1)!(l-k)!} \\ = \frac{(l+1) \cdot l!}{(k+1) \cdot k!(l-k)!} = \frac{l+1}{k+1} \cdot l C_k$$

$$(다) \sum_{k=0}^m \frac{m+1}{m+5} C_{k+1} = \sum_{k=0}^m \frac{\frac{m+1}{k+1} \cdot m C_k}{\frac{m+5}{k+1} \cdot m+4 C_k} \\ = \frac{m+1}{m+5} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{m C_k}{m+4 C_k}$$

13. 행렬

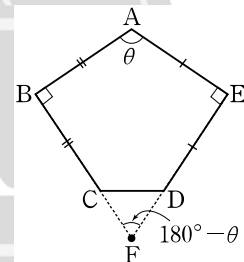
$$(BA)^2 = BABA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^2 = ABAB \\ = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

14. 벡터

ㄱ. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ 와 $\overrightarrow{AM}$ 은 서로 평행하다. $\therefore$ 참

ㄴ.



위의 그림과 같이 $\overrightarrow{BC}$ 와 $\overrightarrow{ED}$ 의 연장선의 교점을 F라 하자.

$\angle BAE = \theta$ 라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED}$ 가 이루는 각의 크기는 $180^\circ - \theta$ 이고,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AE}| \cos \theta$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED} = |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{ED}| \cos (180^\circ - \theta) \\ = -|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{ED}| \cos \theta$$

또한, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|, |\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{ED}|$ 이므로

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED} \quad \therefore \text{참}$$

$$\text{ㄷ. } |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED} + |\overrightarrow{ED}|^2, \\ |\overrightarrow{BE}|^2 = |\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}|^2$$

$$= |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + |\overrightarrow{AE}|^2$$

이다. ㄴ에서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED}$ 이고,

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|, |\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{ED}| \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}|^2 = |\overrightarrow{BE}|^2$$

$\therefore |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{BE}| \quad \therefore$ 참
따라서, $\neg$, $\perp$, $\supset$ 모두 옳다.

15. 무한급수

$S_1 = (\text{반원 } B_1 A_1 D_1 \text{의 넓이}) - (\text{부채꼴 } C_1 D_1 B_1 \text{의 넓이} - \text{삼각형 } C_1 D_1 B_1 \text{의 넓이})$

$$= \frac{9\pi}{2} - \left(\frac{18\pi}{4} - 9 \right) = 9$$

원 O_1 의 반지름의 길이는 3이고 원 O_2 의 반지름의 길

이는 $3(\sqrt{2}-1)$ 이므로 $\frac{S_2}{S_1} = (\sqrt{2}-1)^2$

S_n 은 등비수열을 이루고 $S_n = T_n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (S_n + T_n) = \frac{2 \cdot 9}{1 - (\sqrt{2}-1)^2} = 9(\sqrt{2}+1)$$

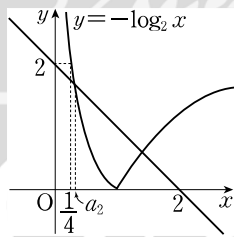
16. 로그함수

$\neg$.

$$-\log_2 \frac{1}{4} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\text{그림에서 } \frac{1}{4} < a_2$$

$\therefore$ 거짓



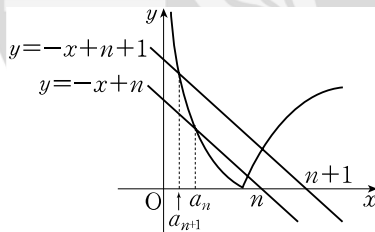
$\perp$.

$$0 < a_{n+1} < a_n$$

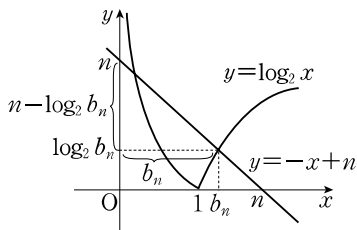
이므로

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$\therefore$ 참



$\supset$.



$$1 < b_n < n \text{ 이므로 } \frac{b_n}{n} < 1$$

$$-b_n + n = \log_2 b_n \text{ 이므로}$$

$$b_n = n - \log_2 b_n \text{ 이고 } \log_2 b_n < \log_2 n \text{ 이므로}$$

$$\frac{b_n}{n} = 1 - \frac{\log_2 b_n}{n} > 1 - \frac{\log_2 n}{n} \quad \therefore \text{ 참}$$

따라서, 옳은 것은 $\perp$, $\supset$ 이다.

17. 미분법

$\neg$. $g(x)$ 는 $-1 < x < 1$ 에서 미분가능하므로

$x = -1$ 과 $x = 1$ 에서 미분가능성만 확인하면 된다.

i) $x = -1$ 일 때

$$g'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h}$$

$$= \begin{cases} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) \\ \lim_{h \rightarrow -0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) \end{cases}$$

조건에 의해 $f'(-1) = f'(1)$ 이므로 $g'(-1)$ 은 존재한다.

ii) $x = 1$ 일 때

마찬가지로,

$$g'(1) = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) \\ \lim_{h \rightarrow -0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) \end{cases}$$

$\therefore g'(1)$ 은 존재한다.

$\therefore g(x)$ 는 모든 실수에서 미분가능이다. $\therefore$ 참

$\perp$. $\neg$ 과 마찬가지로

$g(x)$ 가 실수 전체에서 미분가능하면

$f(1) = f(-1)$, $f'(1) = f'(-1)$ 이 되어야 한다.

$f(x) - f(1) = (x+1)(x-1)(x^2 + ax + b)$
가 된다.

$$f'(x) = (2x)(x^2 + ax + b) + (x^2 - 1)(2x + a)$$

$$f'(1) = 2(1 + a + b)$$

$$f'(-1) = -2(1 - a + b) \text{에서}$$

$$f'(1) = f'(-1) \text{이므로}$$

$$2 + 2a + 2b = -2 + 2a - 2b \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore f'(0) = -a, \quad f'(1) = 2(1 + a - 1) = 2a$$

$$\therefore f'(0) \times f'(1) = -2a^2 \leq 0$$

따라서 $a = 0$ 일 때

$$\text{즉, } f(x) = (x^2 - 1)^2 \text{인 경우 } f'(0) \times f'(1) = 0$$

이 된다. $\therefore$ 거짓

$\supset$. $\perp$ 에서

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + ax - 1) + f(1) \text{이 되는데}$$

$f'(1) = 2a > 0$ 이면 $f'(-1) > 0$ 이 되고
최고차항 계수가 1인 4차

함수는 $x \rightarrow -\infty$ 일 때

$f(x) \rightarrow \infty$ 가 되어야 하므로

$f'(x)$ 는 $x < -1$ 일 때

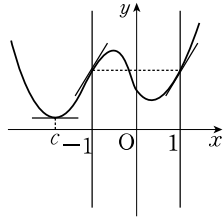
$f'(x) < 0$ 이 되는 x 가 있고,

중간값 정리에 의해

$f'(c) = 0$ 이 되는 c 가 $(-\infty, -1)$ 에 적어도 1개

존재한다. $\therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



18. 미분법

$$f'(x) = 2x(x^2 + x - 2) + (x^2 + 1)(2x + 1)$$

$$\therefore f'(2) = 4(4 + 2 - 2) + (4 + 1)(4 + 1)$$

$$= 16 + 25$$

$$= 41$$

19. 무리방정식

$$x^2 - 7x + 9 = t \text{라 두면}$$

$$\sqrt{t+6} = t \text{에서 } t \geq 0 \text{이다.}$$

$$t + 6 = t^2$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$(t-3)(t+2) = 0$$

$$\therefore t = 3 (\because t \geq 0)$$

$$\therefore x^2 - 7x + 9 = 3$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

따라서, 모든 실근의 곱은 6이다.

20. 공간도형의 방정식

직선에 수직이므로 평면의 법선벡터

$$\vec{h} = (2, 3, 1) \text{이다.}$$

따라서, 평면의 방정식은

$$2(x-1) + 3(y+5) + (z-2) = 0$$

$$2x + 3y + z + 11 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = 1, c = 11$$

$$a + b + c = 15$$

21. 적분법

폐구간 $[0, 1]$ 을 n 등분하므로

$$x_k = \frac{k}{n} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n) \text{이다.}$$

$$A_1 + A_n = \frac{7n^2 + 1}{n^3}$$

$$\frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{7n^2 + 1}{n^3}$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{a}{n} + 2b + a + 1 = 7 + \frac{1}{n^2}$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{8k}{n} A_k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 8 \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 8 \cdot \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 8xf(x)dx$$

$$= \int_0^1 8x(x^2 + 3)dx$$

$$= \left[2x^4 + 12x^2 \right]_0^1$$

$$= 14$$

22. 수열

$$A_n(x_n, 0) \text{이므로 } P_n\left(x_n, \frac{1}{x_n}\right)$$

$$Q_n\left(\frac{1}{x_n}, x_n\right), R_n\left(\frac{1}{x_n}, 0\right), A_n\left(\frac{1}{x_{n+1}} + 1, 0\right)$$

$$\therefore x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + 1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$x_4 = \frac{1}{x_3} + 1 = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$$

$$x_5 = \frac{1}{x_4} + 1 = \frac{5}{8} + 1 = \frac{13}{8}$$

$$\therefore p + q = 8 + 13 = 21$$

23. 무한급수

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$ar = \frac{1}{2}, ar^4 = \frac{1}{6}$$

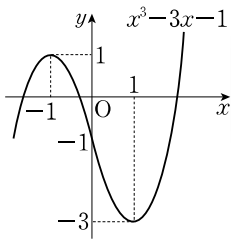
$$\frac{ar^4}{ar} = r^3 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1})^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} (ar^n)^3 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a^3 r^{3n} \\ &= \frac{a^3 \cdot r^3}{1 - r^3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore p + q = 16 + 3 = 19$$

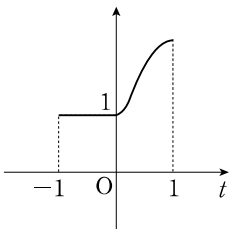
24. 적분법

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ 에서 $x = \pm 1$ 에서 극값을 가지고
 $f(1) = 1 - 3 - 1 = -3$
 $f(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$
 이므로 그래프를 그리면



$-1 \leq x \leq t$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하므로
 t 를 움직여보면

- i) $-1 \leq t \leq 0$; $g(t) = 1$
- ii) $0 < t \leq 1$; $g(t) = -(t^3 - 3t - 1)$
 $= -t^3 + 3t + 1$



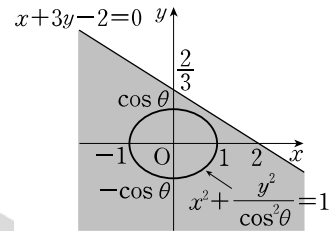
$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 g(t) dt &= 1 + \int_0^1 (-t^3 + 3t + 1) dt \\ &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore p + q = 4 + 13 = 17$$

25. 공간도형의 방정식

평면 α 가 구의 중심을 지나므로 단면은 반지름의 길이가 1인 원이 된다.

이 원을 xy 평면에 정사영하면 장축은 2이고 단축은 $2\cos\theta$ 인 타원이 된다.



그림에서 타원이 어두운 부분에 존재해야 한다.

따라서, 두 도형 $x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\theta} = 1$, $x + 3y - 2 = 0$
 이 만나지 않거나 접하면 된다.

타원의 접선 중 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인 것을 구하면

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \text{에서 위쪽에 있는 접선은}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \sqrt{\frac{1}{9} + \cos^2\theta}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{9} + \cos^2\theta} \leq \frac{2}{3}$$

$$\cos^2\theta \leq \frac{1}{3}, M^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 60M^2 = 60 \times \frac{1}{3} = 20$$

[미분과 적분]

26. 삼각함수

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{-2\sqrt{2}}{1 - 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sin\theta \cdot \tan\theta = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

27. 미분법

$y = e^x$ 의 $(1, e)$ 에서의 접선은

$$y = e(x - 1) + e = ex \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$y = 2\sqrt{x-k}$ 의 $x=t$ 에서의 접선은

$$y = \frac{1}{\sqrt{t-k}}(x-t) + 2\sqrt{t-k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t-k}}x + \frac{-t+2(t-k)}{\sqrt{t-k}} \dots\dots\dots \textcircled{L}$$

㉠과 ㉡이 일치하므로

$$e = \frac{1}{\sqrt{t-k}}, t-2k=0 \quad \therefore t=2k$$

$$\therefore k = \frac{1}{e^2}$$

[참고] $ex = 2\sqrt{x-k}$ 를 정리하여 $D=0$ 임을 이용해
도 된다.

28. 조월함수의 극한

$\angle POQ = 2\theta$ 이고, $\overline{OP} = 1$ 이

므로 $\overline{PQ} = \tan 2\theta$

$\overline{OQ} = \frac{1}{\cos 2\theta}$ 이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{\tan 2\theta - \frac{1}{\cos 2\theta}}{\theta - \frac{\pi}{4}}$$

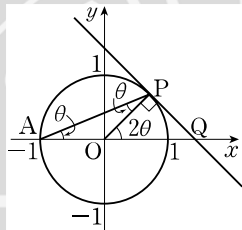
$$= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sin 2\theta - 1}{\cos 2\theta}$$

$\theta - \frac{\pi}{4} = t$ 라 치환하면

$$\lim_{t \rightarrow -0} \frac{1}{t} \cdot \frac{\cos 2t - 1}{-\sin 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -0} \frac{1 - \cos^2 2t}{1 + \cos 2t} \cdot \frac{1}{t \sin 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -0} \frac{1}{1 + \cos 2t} \cdot \frac{\sin 2t}{2t} \cdot 2 = 1$$



29. 적분법

㉠. $x = 1-t$ 로 치환하면

$$\begin{cases} dx = -dt, \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{cases}$$

(주어진 식)

$$= \int_0^1 f(x) \cdot g'(1-x)dx - \int_0^1 g(x) \cdot f'(1-x)dx$$

$$= \int_0^1 f(x) \cdot g'(1-x)dx + \int_1^0 f'(t) \cdot g(1-t)dt$$

$$= \int_0^1 \{f(x) \cdot g'(1-x) - f'(x) \cdot g(1-x)\}dx$$

$$= - \int_0^1 \{f'(x) \cdot g(1-x) - f(x) \cdot g'(1-x)\}dx \dots\dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$= -k \quad \therefore \text{참}$$

㉡. ㉠에서

$$k = \int_0^1 \{f(x) \cdot g(1-x)\}'dx$$

$$= \left[f(x) \cdot g(1-x) \right]_0^1$$

$$= f(1) \cdot g(0) - f(0) \cdot g(1) = 0$$

$$\therefore k=0 \quad \therefore \text{참}$$

㉢. ㉡으로부터

$$k = \int_0^1 \{f(x) \cdot g(1-x)\}'dx$$

$$= \left[f(x) \cdot g(1-x) \right]_0^1$$

$$= f(1) \cdot g(0) - f(0) \cdot g(1)$$

$$= \ln 2 \cdot \sin 0 - \ln 1 \cdot \sin \pi$$

$$= 0 \quad \therefore \text{참}$$

따라서, ㉠, ㉡, ㉢ 모두 옳다.

30. 적분법

경과거리는

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{16(1-\sin 2t) + 4\sin^2 2t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2(2-\sin 2t)dt$$

$$= \left[4t + \cos 2t \right]_0^{2\pi}$$

$$= 8\pi = a\pi$$

$$\therefore a^2 = 64$$

[확률과 통계]

26. 자료의 정리

자료의 개수가 9이므로 중앙값은 크기순서로 나열했을
때 5번째 자료의 값이다.

또한, x 를 제외한 나머지 8개의 자료를 순서대로 나열하면 다음과 같다.

2, 7, 8, 10, 17, 20, 25, 28

따라서, 중앙값을 M 이라 하면

$x < 10$ 일 때는 $M = 10$

$10 \leq x \leq 17$ 일 때는 $M = x$

$x > 17$ 일 때는 $M = 17$

따라서 구하는 그래프의 개형은 ③이다.

27. 평균과 분산

각 모둠에서 2명씩 택할 때 남학생들만 택할 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

따라서, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{3}{10}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 10 \times \frac{3}{10} = 3$$

28. 확률의 계산

세 코스를 모두 체험한 후 받은 쿠폰이 모두 4장인 경우와 그 각각의 확률은 아래와 같다.

A	B	C	확률
2	1	1	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$
1	2	1	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{81}$
1	1	2	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$

따라서, 구하는 확률은

$$\frac{\frac{8}{81}}{\frac{2}{27} + \frac{8}{81} + \frac{1}{9}} = \frac{8}{23}$$

29. 정규분포

동물 A, B의 길이를 각각 확률변수 X , Y 라 하면 X , Y 는 각각 정규분포 $N(10, 0.4^2)$, $N(12, 0.6^2)$ 을 따른다.

동물 A의 화석을 동물 A의 화석으로 판단할 확률은

$$P(X < d) = P\left(Z < \frac{d-10}{0.4}\right)$$

이고, 동물 B의 화석을 동물 B의 화석으로 판단할 확률은

$$P(Y \geq d) = P\left(Z \geq \frac{d-12}{0.6}\right)$$

이다. 두 확률이 같아야 하므로

$$\frac{d-10}{0.4} = -\frac{d-12}{0.6}$$

$$\therefore d = 10.8$$

30. 모비율의 추정

신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[a, b]$ 이므로

$$b - a = 2 \times 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}}{100}} = 1.96 \times \frac{2}{25}$$

이고, 신뢰구간의 최대 허용 표본오차는 $1.96 \times \sqrt{\frac{1}{4n}}$

이므로

$$1.96 \times \sqrt{\frac{1}{4n}} \leq 1.96 \times \frac{1}{25}$$

$$4n \geq 25^2$$

$$n \geq 156.25$$

n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 157

[이산수학]

26. 점화식

$a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ 에서

$$a_3 = 2a_2 + a_1 = 12$$

$$a_4 = 2a_3 + a_2 = 29$$

$$a_5 = 2a_4 + a_3 = 58 + 12 = 70$$

$$\therefore a_5 = 70$$

27. 경우의 수

i) 사탕을 (3, 1, 1)로 나누어 줄 때
사탕을 나누는 경우의 수 : ${}_3C_1$ (가지)

초콜릿을 나누는 경우의 수 : $x + y = 5$ 의 자연수해의 개수이므로 ${}_2H_3 = 4$ (가지)

$$\therefore {}_3C_1 \times 4 = 12(\text{가지})$$

ii) 사탕을 (2, 2, 1)로 나누어 줄 때
사탕을 나누는 경우의 수 : ${}_3C_1$ (가지)

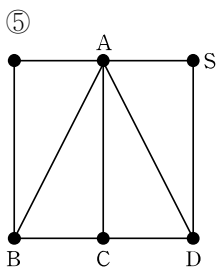
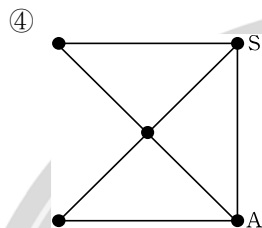
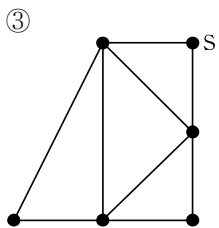
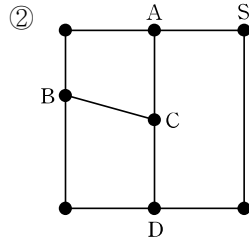
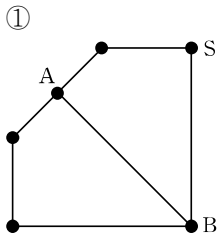
초콜릿을 나누는 경우의 수 : 1(가지)

$$\therefore {}_3C_1 \times 1 = 3(\text{가지})$$

i), ii)에서 $12 + 3 = 15$ (가지)

28. 오일러회로

오일러회로를 묻는 문제로서 각각을 다시 그려보면



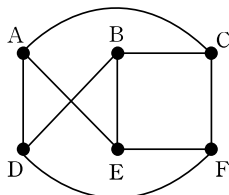
각각에서 홀수점을 찾아보면

- ① : A, B의 2개
- ② : A, B, C, D의 4개
- ③ : 모두 짝수점
- ④ : S, A의 2개
- ⑤ : A, B, C, D의 4개

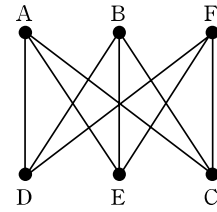
따라서, S를 출발점으로 하는 오일러 회로가 존재하는 것은 ③뿐이다.

29. 그래프

그림의 그래프의 점에 기호를 붙여보자.



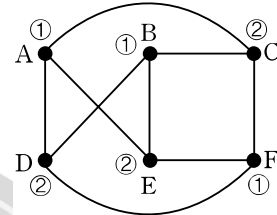
ㄱ. 다음과 같이 그려보면 평면그래프가 불가능하다.
 ∴ 거짓



ㄴ. $B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow B$ 의 회로가 존재한다.

∴ 참

ㄷ. 아래와 같이 색칠을 하면 가능하다. ∴ 참



따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

30. 최적화

설치용량당 가치를 구해보면 다음과 같다.

A	B	C	D	E	F	G
$\frac{3}{40}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{5}$

따라서, 설치용량당 가치를 크기순으로 나열하면

G, F, B, D, E, C, A이고

각각의 가치가 4, 3, 4, 3, 2, 2, 3이므로 누적가치가 15점 이상이 되려면 G, F, B, D, E의 순서로 설치해야 한다.

따라서, 89(MB)의 용량이 필요하다.