

제 7 강 일반 상대성 이론/ 블랙홀과 우주론

기계공학부 강승민, 한재승, 강동효

1) 일반 상대성 이론

*일반 상대성이론이란 무엇인가?

일반 상대성 이론은 이름에서 볼 수 있듯이 특수 상대성 이론의 영역을 더 확장한 것이다. 특수 상대성에서는 관성계 즉 가속되지 않고 일정한 속도로 움직이는 계를 기준으로 길이수축, 시간팽창 등을 설명하였다. 하지만 아인슈타인은 가속되는 계도 포함할 수 있는 이론을 만들고자 하였다. 그렇기 때문에 일반 상대성 이론은 가속하고 있는 계에 대한 물리 현상도 나타낼 수 있다. 특수 상대성 이론과의 가장 큰 차이점은 시공 자체를 영구불변의 개념에서 물리적 대상으로 바꾸어 내고 중력을 시공의 곡률로 표현했다는 것이다.

*어째서 일반 상대성이론은 중력에 관한 이론인가?

일반상대성이론은 관성 질량(가속도에 저항하는 정도)과 중력 질량(중력에 반응하는 정도)이 같다는 등가성 원칙으로부터 시작한다. 두 값의 등가성으로 인해 관측자가 한 물체를 따라 낙하할 때 다른 모든 낙하 물체도 정지해있는 것처럼 관찰할 수 있다. 중력과 마찬가지로 거리의 제곱에 반비례하고 두 물체의 특정 값의 곱에 비례하는 특성을 보이는 전자기력은 전하량과 관성 질량이 같지 않기 때문에 모든 물체에 힘이 작용하지 않는 것처럼 보이는 하나의 특정한 가속계가 있을 수 없다. 이는 중력이 매우 특별하다는 것을 의미한다.

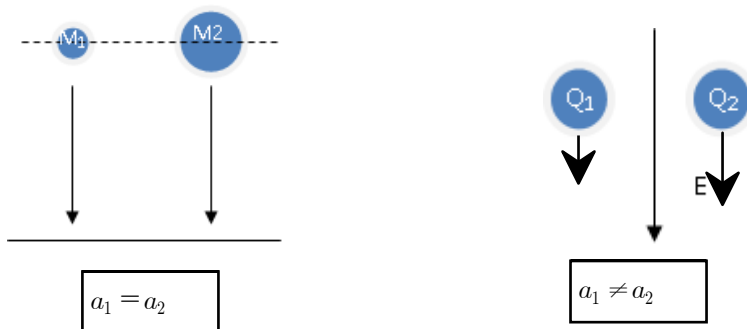


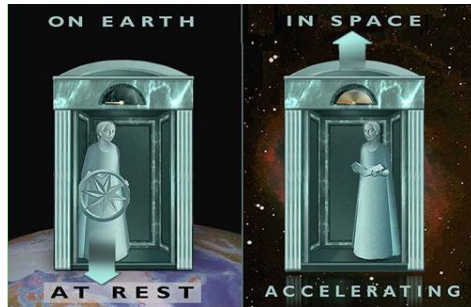
그림: 중력과 전기력의 차이: 중력만이 가속에 의해 상쇄된다 (등가원리). -

* 모든 것이 정지되어 있는 계를 정할 수 있는 것의 의미는?

모든 것이 정지되어 있는 가속계에(이를 국소 관성계라 한다)서 본다면 모든 물체의 중력에 의한 운동은 없다. 이 계의 관찰자에겐 중력은 더 이상 힘이 아니다. 관찰자의 가속에 의해 중력을 상쇄할 수 있기에 일반상대성이 성립한다면 중력은 힘이 될 수 없다. 이러한 특수성을 헤아리기 위해서 일반상대론은 무엇보다 우선 중력을 기술해야 한다.

예) - 아인슈타인의 엘리베이터

- 이 그림에서의 엘리베이터 안에 있는 사람은 지구위에서 중력을 받을 때와 우주공간에서 가속이 되고 있을 때를 구별 할 수 없다.

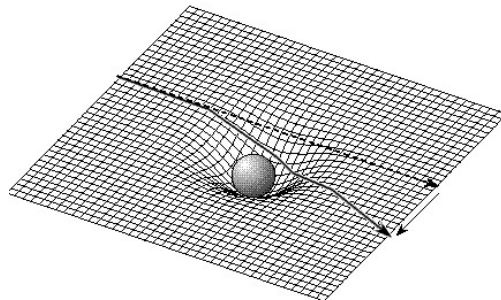


* 중력 힘이 아니라고 가정 한 후 아인슈타인은 다음과 같은 논증을 하게 된다.

① 중력이 힘이 아니라면 힘을 받지 않는 빛이나 물체의 궤도가 왜 휘는가?

아인슈타인은 힘을 받지 않으므로 빛은 최단거리를 통해 운동한다고 생각했고, 그는 최단거리가 휘어 있음을 설명하기 위해 **공간이 휘어있는 비유클리드 기하학과** 접목할 수 밖에 없었다.

② 공간이 왜 휘는가?



빛의 궤도가 물체주위에서 휘는 것을 물체의 중력과 연결하려면, 공간이 물체의 질량에 의해 휘다고 볼 수 밖에 없다. 결론적으로 **공간은 질량(=에너지)에 의해 휘다.** 즉, 빛은 '직진' 하지만 **휘는 공간을 따라 이동하므로 휘는 것처럼 보이고, 공간의 휨은 질량에 의해 발생하므로 곡률과 중력의 효과는 같다고 할 수 있다.**

아인슈타인의 결론 : 질량이 공간을 휘게 만들었다. 공간이 휘 정도는 질량(=에너지, 질량과 에너지는 등가이므로)에 의하여 결정된다.

- 공간이 질량에 의해 휘다는 것에 생각이 미치자 그는 이를 기술할 수 있는 정량적인 지표가 필요했다. 아인슈타인은 이를 위해 Riemann Geometry의 'metric'이라는 개념을 가져왔다. 토지를 가격으로 환산한 부동산 지도는 리만 기하학에 대한 좋은 비유이다.
- 또한, 이를 통해 만든 방정식은 뉴턴의 중력이론 또한 설명할 수 있어야 한다.

*Metric이란 무엇인가

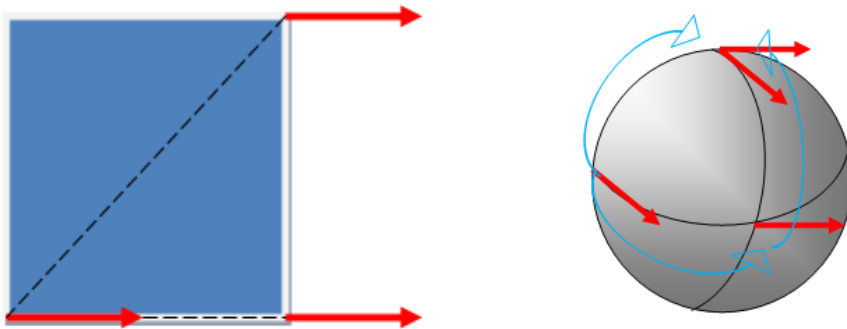
평평한 공간이 있다고 하면, 공간의 임의의 지점에서의 피타고라스 정리는 모든 지점에서 $ds^2 = dx^2 + dy^2$ 이다.

하지만 공간이 굽은 경우, 임의의 지점에서 측정된 거리는 다음과 같이 표현된다.

$$ds^2 = A \cdot dx^2 + B \cdot dy^2 + C \cdot dx \cdot dy$$

주어진 폭의 도로를 내는데 서울과 충청도에선 다른 액수가 필요하다. (A,B,C는 위치의 함수이다.) 도시에 따라서는 동서방향과 남북방향의 도로가 다른 가격일수 있다(A,B는 같지 않아도 된다). 메트릭은 가격으로 환산된 도로의 길이라 생각하면 된다.

공간의 굽은 정도를 표시하기 위해 평행이동을 사용한다.



왼쪽 그림에서와 같이 평평한 공간에서 다른 방법으로 시행한 평행이동은 같은 화살표를 준다. 이제, 굽은 공간인 구에 대해서 보자. 구의 표면을 따라 파란 화살표의 방향으로 평행이동한 두 빨간 화살표는 서로 만나며, 일치하지 않는다. 이 화살표의 차이를 곡률의 정도의 지표로 사용할 수 있다. 또한 이 때 평행이동은 metric의 미분으로 표시된다

이러한 고찰의 결과로 아인슈타인은 공간의 곡률(휨 정도)이 질량과 에너지로부터 기인한다는 방정식을 만들고 리만 기하학을 통한 수학적인 풀이 과정을 통해 중력을 기술하였다.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

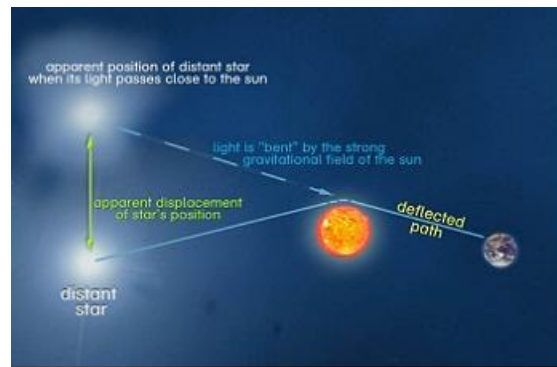
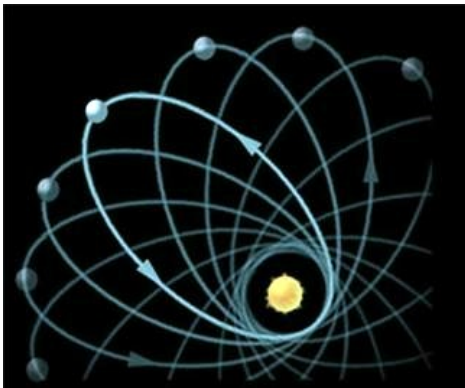
위 식에서 좌변은 공간의 굽은 정도를, 우변은 물질이 갖고 있는 에너지/질량을 나타낸다. 즉 앞에서 확인한 바와 같이 **물질이 공간의 곡률을 결정한다**는 것 (space-time matter)이다. (보통 이론물리에서 $c = 1$ 인 단위계를 쓰므로 강의필사본엔 c 가 없다.)

* 일반상대론으로 설명되는 현상:

아인슈타인의 일반상대성 이론은 수성의 근일점 이동과 태양 주위에서 빛이 휘는 것을 통해 실험적으로 확인 할 수 있다.

(수성의 세차운동)

(태양 중력에 의한 빛의 휨)



①수성의 근일점 이동: 뉴턴법칙에 의해 수성의 궤도는 반지름 제곱에 반비례한다. 실제로는 태양의 자전에 의해 불균형한 모양이 되므로 더 많은 항이 필요로 한다. 하지만 이런 보정 후에도 100년에 43"의 오차가 발생한다. 이 오차는 일반상대성에 의해 완벽히 설명된다.

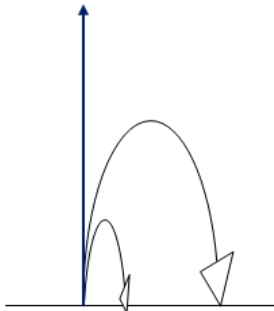
②태양 주위에서 태양의 질량에 의해 빛의 휘는 것은 이미 관측을 통해 확인 되었다.

II Black Hole 과 우주론

아인슈타인의 특수상대성과 일반 상대성 이론은 우주에 대한 새로운 해석을 제시한다.

1. Black Hole

블랙홀의 개념이 처음으로 등장한 것은 1783년 Michell 의 편지에서 이다.



그림과 같이 지상에서 쏘아 올리는 물체의 속력이 높으면 높을수록 최고높이가 높아지고, 결국은 **중력에서 벗어날 수 있는 최소한의 속도인 탈출속도를 가지게 된다.**

이때, 질량이 일정한 별이 수축하면 할수록 필요한 탈출속도는 점점 커지게 되고 결국 탈출속도가 빛의 속도가 된 후에는 빛조차 탈출할 수 없게 되어 블랙홀이 생성된다.

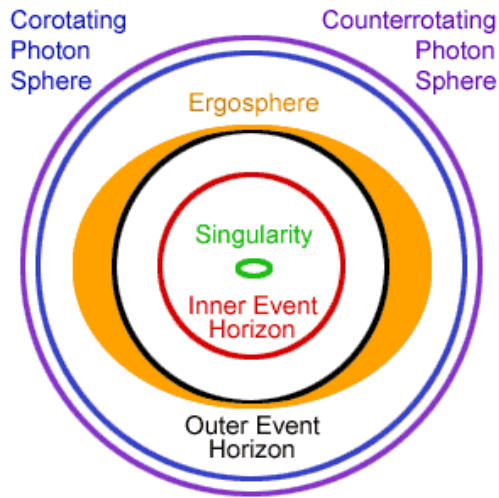
따라서 블랙홀의 생성조건은 질량 m 의 물체가 다음과 같이 주어지는 반경보다 작은 거리로 압축되는 것이다.

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

이 식에서 볼 수 있듯 m 값이 작더라도 특정한 반지름까지 질량이 수축하게 되면 빛이 빠져나갈 수 없는 블랙홀이 될 수 있다.

* 블랙홀에서의 물리 현상

- 블랙홀의 Event Horizon과 photosphere: Event Horizon의 내부에서는 빛을 밖으로 쏘아도 안으로만 떨어진다. 또 시간과 공간이 역전된다. 그리고 Event Horizon 밖에는 빛을 수평으로 쏘았을 때 빛이 원운동을 하게 되는 photosphere가 존재한다.



- 아인슈타인의 방정식은 에너지, 엔트로피, 온도를 이용하여, 열역학적 해석이 가능하다.

①블랙홀의 온도:

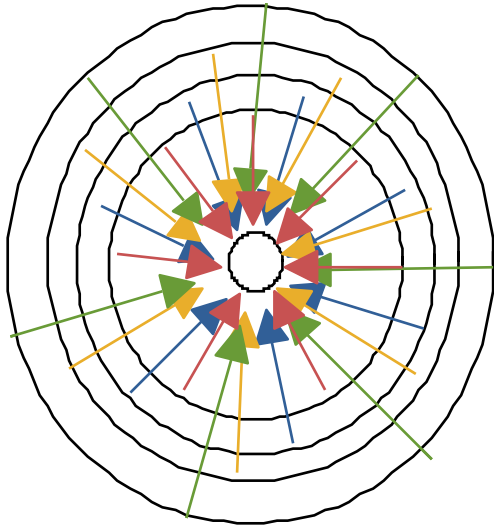
$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_b} \quad (\approx \frac{1.227 \times 10^{23} \text{ kg}}{M} \text{ K})$$

②블랙홀의 엔트로피: 일반적으로 엔트로피는 부피에 비례하지만, 블랙홀에서는 외부에서 보면 블랙홀로 들어오는 모든 것이 Event Horizon에 쌓이므로 엔트로피가 면적에 비례한다고 볼 수 있다. 엔트로피가 부피가 아니라 면적에 비례하는 것을 홀로그래픽 현상이라 한다.

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} \cdot A$$

2. 우주론

Olbers의 역설 - 우주가 영원 무한하고 정지해 있다면 밤도 대낮처럼 밝아야 한다. 빛의 밝기는 거리의 제곱에 반비례 하고 밤하늘의 별또한 거리의 제곱에 비례하여 많아지므로(우주가 균일하기 때문에) 임의의 거리에서 오는 별빛들의 총합은 거리에 관계없이 일정할 것이다.



$$\begin{aligned}
 I &\propto \frac{1}{r^2} \\
 I &= \text{빛의세기} \\
 (\text{거리 } r \text{에서 빛을 내는 별들의 수}) &\propto 4\pi r^2 (= \text{천구의면적}) \\
 \therefore (\text{거리 } r \text{에서 오는 별빛의 세기의 총합}) \\
 &= I \cdot (\text{거리 } r \text{에서 빛을 내는 별들의 수}) \\
 &\propto \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \text{일정}
 \end{aligned}$$

즉 위의 그림에서 거리에 따라 오는 빛들의 합(색깔이 같은 화살표의 합)이 일정하다는 것이다. 우주가 무한하다면 지구를 도달하는 빛은 무한하다.

- 그에 따른 결론

1) 케플러의 결론

케플러는 우주가 무한하다는 가정이 틀렸다고 생각하여서 우주를 유한하다고 생각하는 결론을 지었다.

2) 켈빈의 결론

켈빈은 빛의 속도가 유한하다는 점에 착안하여서, 밤하늘이 밝게 빛나려면 수백조 광년 이상의 거리로부터 빛이 도달해야 한다고 결론짓고, 우주의 나이가 그렇게 되지 않았다고 결론지었다. 우주의 영원함의 가정을 틀렸다고 생각한 거라 볼 수 있다.

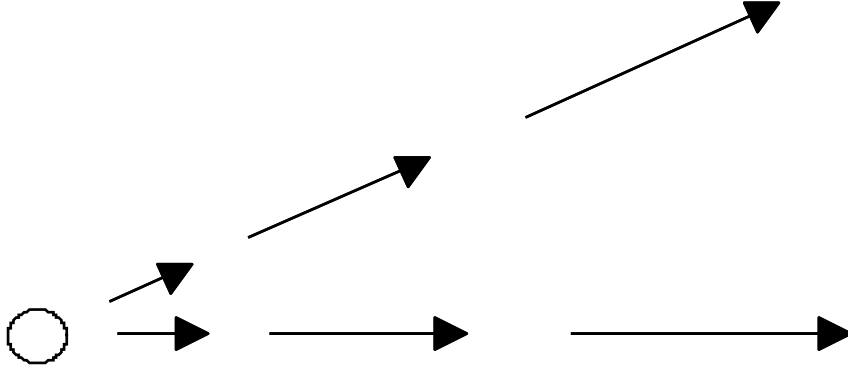
3) 빅뱅 우주론으로부터 도출한 결론

빅뱅 우주론에 따르면 우주는 유한한 나이를 가지기 때문에 항성들이 일정한 거리 안에만 존재하고(무한한 우주를 부정), 우주가 팽창하기 때문에(정적인 우주를 부정) 세월이 흘러도 먼 곳에 있는 빛이 도달하지 않기 때문에 밤하늘의 빛의 밝기가 점점 밝아지지도 않음을 설명하였다.

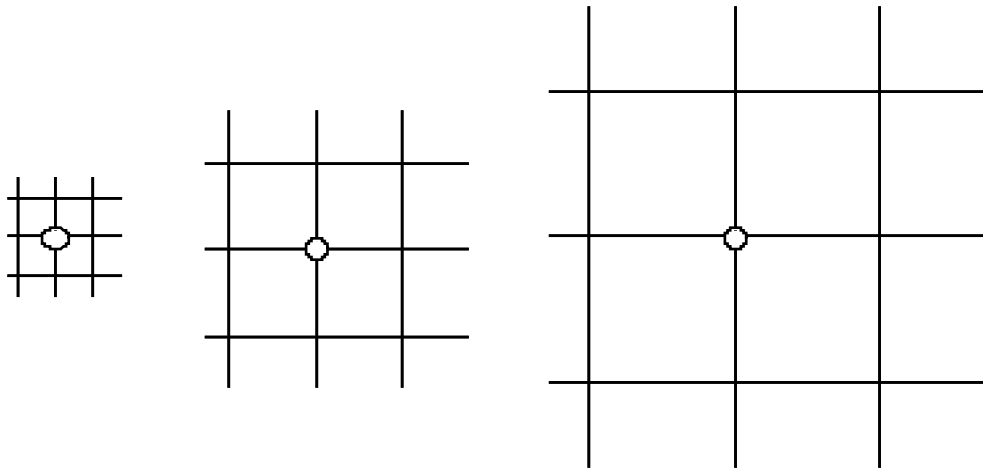
허블의 우주팽창

허블은 지구를 중심으로 별들이 멀어지고 있음을 발견하였다.

또한 멀어지는 속도는 지구에서 멀어질수록 크다는 것 또한 발견하였다.



이 결과에 의하면 모든 별들이 마치 지구를 중심으로 멀어지는 것과 같기 때문에 우주의 중심이 지구라는 생각을 할수도 있다. 그러나 이는 틀린 생각이다.



위의 그림과 같이 우주를 격자에 비유하고 격자위에 원이 지구의 위치라고 하자.

우주는 시간에 따라 팽창하므로 오른쪽으로 갈수록(=시간이 지날수록) 그 크기가 커져간다. 이때 임의의 두 격자점 사이에 멀어지는 정도는 거리에 비례하게 된다.

즉 우주의 중심은 지구가 아니라 모든 점이 될 수 있기 때문에 앞의 생각은 틀린 생각이다.

또한 팽창속도(=멀어지는 속도)는

$$v = Hd \quad (H = \text{허블상수}, d = \text{거리})$$

즉 거리에 비례함을 알 수 있다.

<증명>

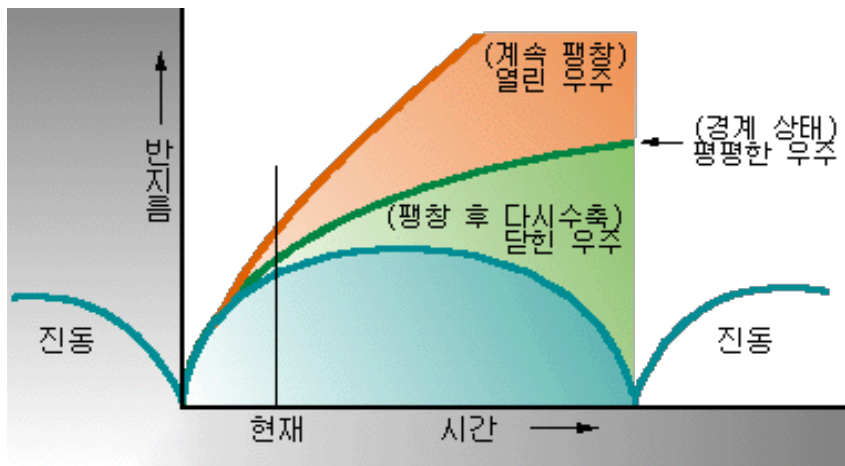
서로 멀어지는 두 별이 있고, 그 사이에 있는 공간에 격자가 표시되어 있다고 가정 하자. 별이 거리에 비례해서 더 빨리 멀어지는 것은 격자거리의 증가, 즉 우주의 팽창으로 설명할 수 있다(두 별이 멀어지는 현상을 별은 공간에 고정되어 있고, 공간 격자 자체가 늘어나는 것으로 해석).

고무줄에 같은 간격으로 0부터 3까지 쓰여 있고 각 지점에는 별이 놓여 있다고 생각하자. (우리는 0인 지점에서 1,2,3에 있는 별을 관측한다.) 이 때, 고무줄의 1칸의 간격이 원래의 3칸 간격에 해당하도록 늘린 경우를 생각해보자.(고무줄은 일정하게 늘어난다고 가정한다.) 이렇게 되면, 1에 있던 별은 원래의 3으로 2칸, 2에 있던 별은 원래의 6에 해당하는 곳으로 4칸, 3에 있던 별은 원래의 9가 있던 곳으로 6칸 이동하는 것으로 보인다. 즉, 격자의 증가가 1,2,3 별의 속도 차이를 만들어 냈고, 이 차이는 원래 거리에 정확히 비례함을 알 수 있다. 따라서 허블의 법칙은 다음과 같이 나타난다.

$$v=H*d$$

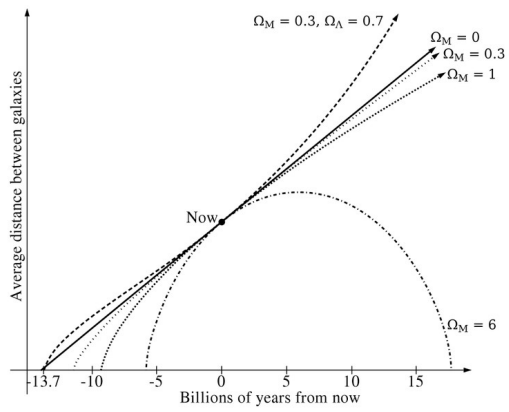
일반 상대론과 우주론

중력이론에서 설명한 곡률텐서의 식에서 메트릭이 시간t에만 의존하고 위치x에는 무관한 답을 찾는 것이 우주론의 주안점이다. 현재의 팽창우주론에서 크기인자-시간 그래프는 아래에 제시됐다. 여기서, 우주의 질량이 클수록 팽창 속도가 느려지다가 충분히 클 경우 다시 수축하는 것을 볼 수 있다.



우주 팽창의 속도는 반지름(크기인자)를 기준으로 위의 그림과 같은 형태로 나타납니다. 1928년 허블이 전개했던 팽창 우주론을 기준으로 한다면 점점 팽창 속도가 줄어드는 평탄한 우주라고 여겨졌었다.

그러나 1998년 초신성을 이용한 거리측정에 의하면 생각보다 우주가 빨리 팽창한다고 한다. 즉 다음그림의 맨윗 곡선처럼 우주는 감속이 아니라 가속팽창을 한다.



이들의 업적은 학계에 공인되어 올해의 노벨 물리학상을 받았다. 이 팽창의 가속도는 암흑 에너지에 영향을 받는 것으로 알려져 있고, 이는 앞으로도 연구가 계속될 중요한 문제이다.