본 자료는 우정호 교수님의 ‘수학 학습 지도 원리와 방법’을 기초로
임용고사의 지문에 등장 가능한 학자들의 ‘예문’들만을
간추려 작업한 것입니다.

문의사항은 www.cyworld.com/yuriwha로 문의 바랍니다.
yuriwha@naver.com

순　　　서

번호	원　문	관　련	소　제	비　고
1	수학학습 지도원리와 방법 1장 3P	Socrates	선분의 비유, 동굴의 비유	박종현, 1667 : 임재훈, 1998
2	수학학습 지도원리와 방법 2장 21P	Bourbaki	공리적 방법에 대한 견해	수학원론 Bourbaki, P. 1276
3	수학학습 지도원리와 방법 2장 42P	Pappus	Pappus의 분석법	Heath, 1981. pp.400~401
4	수학학습 지도원리와 방법 2장 22P	Shibata	Shibata의 현대수학 형성과정 도해	Shibata(1973)
5	수학학습 지도원리와 방법 3장 58P	Rousseau	《에밀》 - 자연주의 교육사상	Boyd, 1994, pp. 448~449
6	수학학습 지도원리와 방법 3장 58P	Rousseau	《에밀》 - 기하지도	Emile, p. 145
7	수학학습 지도원리와 방법 3장 62P	Pestalozzi	Pestalozzi의 수학교육의 이념	Fr bel, 1900, pp. 205~208
8	수학학습 지도원리와 방법 3장 64P	Treutlein	'직관기하' - '공기 정육면체'의 구성	平林一榮, 1987, p. 149
9	수학학습 지도원리와 방법 4장 135P	◦	'양주동' - '맞꼭지각은 서로 같다'	수필 <몇 어찌>, 양주동
10	수학학습 지도원리와 방법 4장 139P	Clairaut	Elemens de geometrie - 발생적방법	Steiner, pp. 11~12
11	수학학습 지도원리와 방법 4장 140P	Linder	발생적 방법의 정의	Schuburing, S. 62
12	수학학습 지도원리와 방법 4장 142P	Klein	Haekel의 재현의 법칙에 근거를 둔 교육 지도 제시법	Klein, 1924, S.289
13	수학학습 지도원리와 방법 4장 143P	Poincare	Poincare의 역사 발생적 원리	Poincare, 1953, P. 135
14	수학학습 지도원리와 방법 4장 143P	Toeplitz	Toeplitz의 '간접적인 발생적 방법'	Toeplitz, 1963, P. V
15	수학학습 지도원리와 방법 5장 171P	Thorndike	Thorndike의 '연결주의'이론 - 초등수학	《산술 심리학》(1922, p.xi)
16	수학학습 지도원리와 방법 5장 175P	Thorndike	Thorndike - 실패의 경험에 대한 부정	Thorndike, 1922, pp. 279~280
17	수학학습 지도원리와 방법 5장 176P	Thorndike	문제에 대한 connections의 구성	Thorndike, 1922, pp. 66~69
18	수학학습 지도원리와 방법 5장 177P	Thorndike	연역적 추론의 맹목적 학습	Thorndike, 1922, pp. 66~69
19	수학학습 지도원리와 방법 6장 203P	Bruner	지식구조의 강조	≪교육의 과정≫(1963, p. 13)
20	수학학습 지도원리와 방법 6장 217P	Bruner	교수이론	Bruner, 1968, p. 72
21	수학학습 지도원리와 방법 7장 238P	Eilenberg	Category 이론의 기본 아이디어	1945, pp. 236~237
22	수학학습 지도원리와 방법 7장 240P	Piaget	Schema, Scheme의 구분	Piaget, 1950, p. 143
23	수학학습 지도원리와 방법 7장 241P	Piaget	동화의 분류	Piaget, et al., 1977
24	수학학습 지도원리와 방법 7장 246P	Piaget	수학적인 조작적 schemes의 변화	Piaget, p. 320
25	수학학습 지도원리와 방법 7장 248P	Piaget	schemes의 역동적인(나선적인) 재구성	Piaget et coll., 1977, p. 306
26	임용고사 기출	Skemp	Skemp의 사고과정	1999년 2번
27	수학학습 지도원리와 방법 7장 252P	Piaget	Inhelder의 논리-수학적 경험의 Pre-Curriculum제공	Bruner, 1963, p. 46
28	수학학습 지도원리와 방법 7장 252P	Dienes	Dienes의 수학적 개념의 학습-지도 과정 6단계	◦
29	수학학습 지도원리와 방법 8장 282P	Descartes	Descartes의 Euclid적인 종합적 양식 비판	Descartes, 1961, pp. 15-16
30	수학학습 지도원리와 방법 8장 285P	Popper	Popper의 지식의 성장에 대한 규정	Popper, 1963, p. Ⅶ
31	수학학습 지도원리와 방법 8장 290P	Lakatos	Lakatos의 귀납논리 부정	Lakatos, 1976, p. 119
32	수학학습 지도원리와 방법 8장 292P	Lakatos	Lakatos - 발견술적 규칙	'보조정리 합체법'
33	수학학습 지도원리와 방법 8장 299P	Dieudonne	엄밀한 연역 전개를 통한 교육적 의사소통	Dieudonne (1973, pp. 16-19)
34	수학학습 지도원리와 방법 8장 300P	Lakatos	Lakatos의 연역적 전개양식 비판	Lakatos, 1976, p. 216
35	수학학습 지도원리와 방법 8장 301P	Lakatos	Rudin의 평등수렴 개념의 도입 비판	Lakatos, 1976, pp. 219-220
36	수학학습 지도원리와 방법 9장 310P	Polya	분석법	Polya, 1962, pp. 27-28
37	수학학습 지도원리와 방법 9장 315P	Polya	Polya의 문제해결 교육론 - 현대적 발견술	Polya, 1954, p. vi
38	수학학습 지도원리와 방법 9장 317P	Polya	Polya의 현대적 발견술	◦
39	수학학습 지도원리와 방법 9장 332P	Polya	Polya의 문제해결 교육론 - 메타 인지적 수업	Polya, 1986, pp. 126-127
40	수학학습 지도원리와 방법 10장 338P	Euler	수학연구에서 귀납추론의 중요성	Polya, 1954, p. 3
41	수학학습 지도원리와 방법 10장 342P	Polya	유추	Polya, 1986, p. 233
42	수학학습 지도원리와 방법 11장 382P	Freudenthal	대중 수학교육의 중요성	Freundenthal, H., 1963, S13
43	수학학습 지도원리와 방법 11장 389P	Freudenthal	Freudenthal의 기존 지식교육의 바탕 비판	◦
44	수학학습 지도원리와 방법 11장 394P	Freudenthal	Freudenthal의 수학 교육학적 현상 규정	Freundenthal, H., 1983, pp. 28-29
45	수학학습 지도원리와 방법 12장 439P	Van Hieles	조작적 구성주의 - 추상화	Peirce, Dienes
46	수학학습 지도원리와 방법 13장 452P	Brousseau	Brousseau의 교수상황 구분	◦
47	수학학습 지도원리와 방법 13장 474P	Brousseau	Dienes effect	Brousseau
48	수학학습 지도원리와 방법 14장 479P	NCTM	NCTM의 기본 입장	생략
49	교육학	Piaget	피아제 % 비고스키	비고스키의 근접 발달 영역
50	교육학	◦	학습자 내부의 정보 처리 과정	◦

1. 선분의 비유, 동굴의 비유

○ Socrates는 세계를 可視界와 可知界로 나누고 그와 대응하는 인식의 수준을 '의견'과 '지식(앎)'으로 구분하였다. 그리고 '선분의 비유'에서 존재를 명료성의 정도에 따라 영상, 실물, 수학적인 것, 이데아의 순서로 구분하고 그에 따른 인식의 수준을 짐작, 믿음, 추론적 사고, 지적 직관의 네 단계로 나누고 있다. 이는 각기 '동굴의 비유'에서의 동굴벽의 그림자, 실물, 별과 달, 태양과 대응되는 것이다. 이를 도해하면 다음과 같다.

<선분의 비유>

	可視界		可知界		
(아래)	영상	실물	수학적인 것	이데아	(위)
	짐작	믿음	추론적 사고	지적 직관	
	의견		지식		
<동굴의 비유>	동굴벽의 그림자	실물	별과 달	태양	

2. 공리적 방법에 대한 견해

○ "공리적 방법을 형식주의라고 부를 수 있는 것은 '형식'이란 용어에 대한 이러한 의미에서 뿐이다. 공리적 방법이 수학에 제공하는 통일성은 형식적 논리의 갑옷, 곧 생명 없는 뼈대의 통일성이 아니다. 그것은 한창 발달하고 있는 유기체의 영양액이요, Lejeune-Dirichlet의 말을 빌리면, 항상 '계산에 사상을 주입하기 위해' 노력한 모든 위대한 수학적 사고가가 기여해 온 유연하고 생산력이 높은 탐구 도구이다. (Bourbaki, P. 1276)

3. Pappus의 분석법

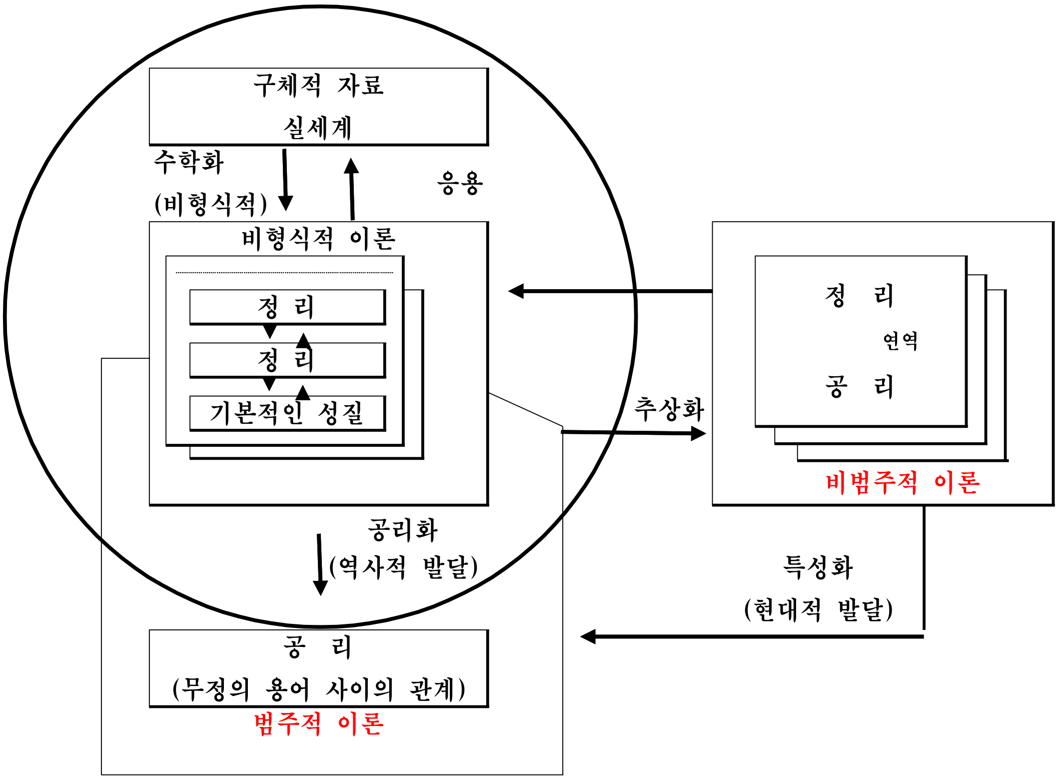
○ 분석은 찾고 있는 것을 마치 인정된 것처럼 여기고 그로부터 잇달은 결과를 거쳐 종합의 결과로 인정되는 것까지 나아간다. 왜냐하면 분석에서 우리는 찾고 있는 것을 마치 이미 이루어진 것처럼 가정하고, 이것이 결과되는 것이 무엇인지를 찾고, 다시 후자의 선행하는 원인이 무엇인지를 찾는 식으로 우리의 발자취를 되밟아 이미 알려져 있는 것이나 제 1원리의 부류에 속하는 것에 이를 때까지 계속하기 때문이며, 우리는 그러한 방법을 분석 또는 거꾸로 풀이하는 것이라고 부른다.

그러나 종합에서는 그 과정을 뒤집어 분석에서 마지막에 도달한 것을 이미 이루어진 것으로 여기고 앞에서 선행자이었던 것을 결과로 자연스러운 순서로 배열하고 그들을 차례로 잇달아 연결함으로써 마지막에 찾고 있는 것의 구성에 이르는데, 이것을 우리는 종합이라고 부른다.

여기서 분석은 두 종류가 있는데, 하나는 진리탐구를 추구하는 것으로 이론적인 분석이라고 불리며, 다른 하나는 찾도록 요구받은 것의 발견을 추구하는 것으로 문제분석이라고 불린다. ① 이론적인 분석에서는 찾고 있는 것을 마치 존재하고 참인 것처럼 가정한 다음 잇달은 결과를 그들 또한 마치 참이며, 우리의 가정에 의해서 확립된 것처럼 여기고 거쳐서 인정된 것에 이른다. (a) 인정된 것이 참이면 찾고 있는 것도 또한 참이며, 증명은 분석과 역순으로 대응한다. 그러나 (b) 우리가 명백히 거짓인 것으로 인정된 것에 이르면 찾고 있는 것 또한 거짓이다.

② 문제분석에서 우리는 제의된 것을 마치 알고 있는 것처럼 가정한 다음 그 잇달은 결과를 참인 것으로 여기고 거쳐서 인정된 것까지 이른다. 거기서 (a) 만일 인정된 것이 가능하고 얻을 수 있다면, 곧 수학자들이 주어진 것이라고 부르는 것이라면, 원래 제안된 것도 가능할 것이며 증명은 또한 분석과 역순으로 대응할 것이지만, (b) 우리가 명백히 불가능한 것에 이르면 문제도 또한 불가능할 것이다.

4. Shibata의 현대수학 형성과정 도식화



5. 《에밀》- 자연주의 교육사상

○ “아동은 그것을 공허한 언어로만 배울 뿐이며, 이것은 외양만의 지식이 되어 아동의 마음에 혼란과 왜곡을 가져다 준다. 이 시기에 알맞은 직접적·적극적 교육이 있다면 그것은 오직 신체적 활동을 통한 마음의 훈련이다. ‘사고하는 것을 배우기 위해서는 지력의 도구인 팔다리와 감각과 그 밖의 신체기관을 움직여 보지 않으면 안 된다.’ 그 중에서도 이 시기에는 감각훈련이 특히 중요하다. …감각을 사용하여 판단하는 것을 배우는 것이다. … 아동기에서 청년기로 넘어가는 과도기에는 호기심과 함께 결과에 대한 예견능력이 발달하여 처음으로 과학공부를 시작할 준비를 갖추게 된다. … 과학공부의 목적은 지식을 제공하는 데에 있는 것이 아니라 지식을 획득하는 취미와 능력을 길러주는 데에 있으며, 그 방법은 아동 자신이 직접 발견하도록 하는 것이다. ‘아동은 과학을 배워야 하는 것이 아니라 과학을 스스로 발견해야 한다.’(Boyd, 1994, pp. 448-449)

6. 《에밀》 - 기하지도

○ 나는 기하가 이동들의 도달거리 내에 있지 않다고 말하였다. 그러나 그것은 우리의 잘못이다. 우리는 그들의 방법이 우리들의 방법이 아니라는 것, 그리고 우리들에게 추론기술이 되는 것이 그들에게는 보는 기술일 뿐이어야 한다는 것을 알고 있지 못하다. 우리의 방법을 그들에게 주는 대신에 그들의 방법을 택하게 하면 더 나을 것이다. 기하를 배우는 우리의 방법은 추론하는 것과 꼭 마찬가지로 상상하는 일이다. 명제를 언급할 때 그 증명을 상상할 필요가 있다. 곧 이 명제가 이미 알고 있는 어느 명제의 결과인가를 알아내고, 같은 그 명제로부터 이끌어 낼 수 있는 모든 결과로부터 요구되는 것을 정확히 선택하는 것이 필요하다. 이러한 방식으로는 가장 정확한 추론자라도 그가 창의력이 풍부하지 않으면 중단하지 않을 수 없게 된다. 그러면 이러한 방법의 결과는 어떠한가? 논증을 발견하게 되기 전에 논증이 우리에게 구술된다. 우리에게 추론하도록 가르치는 대신에 교사는 우리를 위하여 추론하고 우리의 기억력만을 쓰게 한다. 정확한 모양을 만들고 그것들을 결합시키고 서로 다른 것 위에 놓아보게 하고 그들 사이의 관계를 조사하도록 해 보아라. 단지 포개어 놓는 것 이외에 정의도 문제도 어떤 형식의 논증도 요구하지 않고 관찰로부터 관찰로 옮겨가는 가운데 초등 기하학의 전체를 발견할 것이다. 나 자신은 Emile에게 기하학을 가르치려고 의도하지 않는다. 기하학을 나에게 가르칠 사람은 Emile이다. 나는 관계를 찾을 것이고 그가 그것을 발견할 것이다. 왜냐하면 나는 그에게 관계를 발견하게 하도록 그것을 찾을 것이기 때문이다. 이를테면, 콤파스를 이용하여 원을 그리는 대신에 나는 축 위에서 회전하는 실의 끝에 있는 점으로 원을 그린다. 그리고 나서 내가 반지름을 서로 비교하고자 할 때, Emile은 나를 보고 웃을 것이고 줄곧 당긴 같은 실이 다른 거리를 그렸을 리 없다는 것을 이해시켜 줄 것이다. (Rousseau, p.145)

7. Pestalozzi의 수학교육 이념

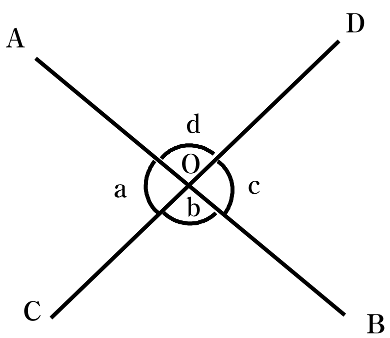
○ 수학은 따라서 인간과 자연사이의, 내적 세계와 외적 세계 사이의, 사고와 지각 사이의 중개자로서 등장한다. … 수학은 자연과 에너지의 산물로서 더욱 물리적이고 역동적으로 다루어져야 한다. … 수학이 없는 (적어도 形과 量에 대한 이따금씩의 지도에 의해서 보충되는 수에 대한 철저한 지식이 없는) 교육은 따라서 연약하고 불완전한 잡동사니이다. 그러한 교육은 인간의 정상적인 교양과 발달에 극복할 수 없는 한계를 끼워 넣는다. … 정신과 수학은 영혼과 종교처럼 분리할 수 없기 때문이다. (Fr bel, 1900, pp. 205~208)

8. '직관기하' - '공기 정육면체'의 구성

○ 손을 윗면에 놓아라. 오른쪽 면에 놓아라. … 그러면 전부 몇 개의 면이 있느냐? 내가 가리키고 있는 이 면을 무엇이라고 부르느냐, 이것은, 이것은? 한쪽 손을 왼쪽면에 다른 쪽 손은 오른쪽 면에 놓아라. 나는 정육면체를 들어올리고 있다. 손은 어떠한 위치에 있느냐? 교실에서 이와 같은 두 면을 지적해 보아라. 거리에서 볼 수 있는 그러한 것을 말해보아라. 이러한 면을 평행인 평면이라고 말한다. … 이번에는 정육면체를 잘라내자. 마찬가지로 마음 속으로 위◦아래 면과 앞◦뒤의 면에 손을 놓아라. 이제 여러분은 3번에 6손으로 공중에서 정육면체를 잘라 내었다. 곧 공기 정육면체를 만든 것이다. 이번에는 자기 혼자서 커다란 공기 정육면체를 만들어 보아라. 작은 공기 정육면체를 만들어 보아라.(平林一榮, 1987, p. 149)

9. '양주동' - '맞꼭지각은 서로 같다'

"a+b는 몇도"
"180도입니다."
"b+c도 180도 이지?"
"예."
"그럼, a+b=b+c이지?"
"예."
"그러니까, a=c 아니냐."
"아하!"



○ 수재 소년 양주동의 "아하!" 경험은 직관적으로 분명한 이 성질에 대한 증명의 의미를 이해한 것으로 볼 수 있는가? 여기서 소년 양주동은 이 증명이 어떤 명제가 어떤 명제를 함의하고 있음을 보였다는 것을 이해하였으며, 평각은 180°라는 성질과 등식의 성질을 이용하고 있음을 이해하였을까?

10. *Elemens de geometrie* - 발생적방법 (Clairaut)

○ 내가 숙고한 바로는 이 과학(곧, 기하학)은 다른 모든 과학과 같이 단계적으로 발달되었음에 틀림없다. 분명히 첫 번째 단계를 일으킨 특별한 필요성이 있었다. 그리고 이러한 첫 번째 단계는 처음 그것을 택한 자들이 초보자이었으므로 초보자의 범위 밖에 놓여 있지 않음에 틀림없다. 이러한 생각에 끌려서 나는 기하학을 탄생시킨 것에의 회귀를 고려하여 첫 번째의 발견자가 사용한 것과 같다고 여겨질 수 있는 진정으로 자연스러운 방법에 의해서, 단지 그들이 필연적으로 범했음에 틀림없는 부정확한 시도를 피해야 할 필요성을 염두에 두면서, 원리를 가다듬으려고 노력하였다. 나에게 토지측량은 기하학의 첫 번째 원리를 생성시키는 데 가장 적합한 것으로 생각되었다. … 이러한 방식으로 모든 단계를 거치면서 초보자는 발명가의 동기를 알게 되고 거기서 더욱 쉽게 발견의 본질을 획득할 수 있다.

자연스러운 순서로 배열된 아이디어는 우리의 기억 가운데 풍요한 구조를 만들기 때문에, 자연스러운 순서로 학습된 것은 보다 쉽게 학습되고 보다 잘 기억된다는 것은 의심의 여지가 없다. … 그 진정한 기초를 관통하여 알게 된 것은 실제로 기억에 의해서가 아니라 판단력에 의하여 유지되므로 매우 강하게 학습자의 자산이 되어 잊을 수 없게 된다고까지 말할 수 있다. (Steiner, pp. 11~ 12)

11. 발생적 방법의 정의

○ 우리는 다음과 같은 교수방법을 발생적 방법이라고 부른다. 즉 소재를 그 자연스런 순서에 따라 다루어, 간단한 것으로부터 합성된 것으로, 원인으로부터 결과에, 보다 작은 것으로부터 보다 큰 것으로, 쉬운 것에서 어려운 것으로 나아가되, 하나하나의 동인을 아주 주의해서 서로 결합하는 것이다.(Schuburing, S. 62)

12. Haeckel의 재현의 법칙에 근거를 둔 교육 지도 제시법

○ 물론 우리는 수학교육학적 입장에서 아동에게 너무 일찍 그러한 추상적이고 어려운 것을 제시한다는 인상을 주지 않도록 해야 한다. 이 점에 대한 나의 견해를 명확히 규정하기 위하여 생물학적 기본법칙을 인용하고자 한다. 그에 따르면 개체는 종족의 전 발달단계를 단축된 순서로 거치면서 발달한다. 이러한 생각은 오늘날 모든 사람들의 교양이 되어 있다. 나는 이 기본법칙을 일반적으로 모든 교육에서와 같이 수학교육에서도 일반적으로 따라야 할 것으로 생각한다. 소년의 자연적인 소질과 연결시켜 인류 전체가 그 순진한 원시상태로부터 보다 높은 인식에 다다른 그 길을 따라 천천히 높은 곳으로, 마지막에 추상적인 형식화에 이르러야 한다.(이어서)

(계속) 이 요구를 재삼 재사 제기할 필요가 있다. 왜냐하면 중세의 스콜라 철학자의 방식에 따라 그 교육을 가장 일반적인 아이디어로 시작하며, 이 방식만을 '유일한 과학적인 방법'이라고 옹호하려고 하는 사람들이 거듭 존재하기 때문이다. 그러나 이러한 근거는 결코 옳지 않다. 곧 과학적으로 가르친다는 것은 과학적으로 사고하도록 인간을 이끄는 것을 의미할 수 있을 뿐이지 결코 처음부터 차디찬 과학적으로 손질된 체계로 사고하도록 이끌 수는 없다. 그러한 자연스러우며 참으로 과학적인 지도방법을 보급하는 데 본질적인 장애는 역사적 지식의 결핍이며, 이는 종종 통감되는 바이다. (Klein, 1924, S.289)

13. Poincare의 역사 발생적 원리

○ 어떤 동물의 태아발달은 지질학적 시대의 그의 선조의 전체 역사를 매우 짧은 기간 동안에 경과한다고 동물학자들은 주장하였다. 인간의 정신발달에서도 마찬가지인 듯하다. 교육자는 아동을 그의 선조가 통과한 모든 단계를 매우 빨리 그러나 어떤 단계도 소실되지 않게 인도해야 한다. 이러한 이유에서 학문의 역사는 우리의 첫째가는 안내자이어야 한다.(Poincare, 1953, P.135)

14. Toeplitz의 '간접적인 발생적 방법'

○ 오늘날 우리가 규범적인 필수 요목으로 간주하여 가르치고 있는 무한소 계산의 이러한 모든 대상들, 곧 평균값의 정리, 테일러 급수, 수렴함수, 정적분, 특히 미분상 자체, 이들에 관해서 결코 다음과 같은 질문은 제기되지 않는다. 왜 그러한가? 어떻게 그들에 이르게 되었는가? 이러한 모든 필수 요목은 또한 한때 흥미진진한 탐구의 목적이었으며, 자극적인 행위이었음에 틀림없다. 곧 그들이 창조되었을 당시에 말이다. 개념의 근원으로 거슬러 올라갈 때, 시간의 먼지와 오랜 사용의 상처가 그로부터 떨어져 나가고 그들은 생기 넘치는 존재로 우리 앞에 다시 소생하게 된다. 그리고 이 때 그로부터 두 가지 실천 방법이 제기된다. 그 완전한 희극화를 통해 학생을 직접 발견에 안내하고 그렇게 함으로써 문제설정, 개념 및 사실이 그들에게 생성되도록 할 수 있거나 - 그것을 나는 "직접적인 발생적 방법"이라고 부를 것이다. - 혹은 그러한 역사적 분석을 통하여 그 본래의 의미와 모든 개념의 실제적인 핵심이 무엇인가를 스스로 배울 수 있으며, 그로부터 이들 개념에 대한, 더 이상 역사와 아무런 관계도 없는, 교수를 위한 결론을 이끌어 낼 수 있다. - 이를 "간접적인 발생적 방법"이라고 부를 것이다. (Toeplitz, 1963, P.V)

15. Thorndike의 '연결주의'이론 - 초등수학

○ 초등교육의 목적은, 완전히 정의도면, 학생이 학교가 조직한 상황에 대한 반응으로 어떤 방식으로 생각하거나 느끼거나 행동하며 학교 밖의 생활에서 당면하는 유사한 상황에서 유사하게 생각하고 느끼고 행동하도록 영향을 받는, 거의 셀 수 없을 정도로 많은 connections 혹은 bonds의 목록에 의해서 나타내어지는, 인간 본성의 생산임이 드러날 것이다. ≪산술심리학≫(1922, p. xi)

16. Thorndike - 실패의 경험에 대한 부정

○ 곤란과 성공 중에서 성공이 결국 사고하는 데 더 생산적이며, 필요는 발명의 어머니가 아니다. 이전의 발명에 대한 지식이 그 어머니요 원래의 능력이 그 아버지이다. (Thorndike, 1922, pp. 279~280)

17. 문제에 대한 connections의 구성

○ 무엇보다도 거의 대다수의 학생들이 … 특정한 지시를 모방하고 맹목적으로 따르면서 이들 계산법을 학습하며, …그것을 십진법으로부터의 필연적인 연역으로 이해하지 못한다는 데에는 의심이 있을 수 없다. 교과서나 교사가 아무리 교묘하고 주의 깊게 그러한 연역을 설명한다고 하여도 이해하지 못하는 학생들의 비율을 또한 그다지 줄어들지 않을 듯 싶다. …여하튼 대부분의 학생들이 연역적 추론에 의해서 계산법을 학습하지 않는다는 것, 곧 그것을 추상적인 원리의 필연적인 결과로 이해하지 않는다는 사실은 확실하다. …사실 나는 순수한 산술은 배워 알고 있듯이 대체로 귀납 과학이라고 믿는다. Thorndike(1922, pp. 66~69)

18. 연역적 추론의 맹목적 학습

○ 매우 재능이 있는 학생들을 제외한 모든 학생들에게 산술원리에 대한 이해를 하는 경제적인 방법은 통상 하듯이 규칙을 배운 다음 적용하는 것이 아니라 지시된 연산을 수행하고 그들을 수행하는 과정에서 원리에 대한 통찰을 하는 것이다. 따라서 모방으로 출발하여 맹목적인 조작 습관으로 시작한 것이 본질적인 요소에 대하여 바르게 반응하는 힘으로 성장할 수 있다. … 수를 가지고 어떤 것을 계속 하면서 바른 결과를 구분해 내면 흔히 결국에는(계속)

(이어서) 최초에 필요한 것으로 생각되었던 추상화에 이를 것이다. … 학생이 먼저 원리를 마스터한 다음에 그것을 단지 적용하는 것이라고 생각하는 것 - 어떤 생각을 먼저 한 다음에 단순한 기계적인 조작으로 계산한다고 생각하는 것은 확실히 최선의 심리학이 아니며 최선의 교육 이론이 아니다. 반대로, 적용은 원리를 확립하고, 확장하고, 세련시키는 것을 돕는다. 학생이 수를 다루는 작업은 과학으로서의 산술의 원리에 대한 그의 이해를 증대시키는 주요한 수단이어야 한다. (Thorndike, 1922, p. 78, 184)

19. 지식구조의 강조

○ 자연과학, 수학, 사회학, 문학에 대한 초기교육은 이러한 교과가 양심적인 지적 정직성을 가지고, 그러나 아이디어의 직관적인 파악과 그러한 기본적인 아이디어의 사용을 강조하여 지도되도록 기도되어야 한다. 교육과정은 그 전개과정에서 학생이 그에 대한 완전한 형식적인 장치를 파악할 때까지 되돌아 와야 하며, 그 기본개념 위에 건설되어야 한다.
Bruner - ≪교육의 과정≫ (1963, p. 13)

20. 교수이론

○ 교수이론은 교육과정이 지식 자체의 본질뿐만 아니라 아는 자와 지식을 얻는 과정의 본질도 반영한다는 사실을 고려하려고 애쓰고 있다. 그것은 특히 교과내용과 방법 사이의 구분이 필연적으로 불분명해지는 기획이다. 대학 교수단 가운데 간직되어 있고 일련의 권위 있는 책 가운데 구체화되어 있는 일단의 지식은 이전의 많은 지적 활동의 결과이다. 이러한 학문 가운데 있는 어떤 것을 누군가에게 가르치는 것은 그로 하여금 결과를 정신에 위탁하게 하는 일이 아니다. 오히려 그것은 그에게 지식의 확립을 가능하게 한 과정에 참여하도록 가르치는 것이다. 우리가 교과를 가르치는 것은 그 교과에 대한 작은 살아 있는 도서관을 만들려는 것이 아니라, 학생으로 하여금 스스로 수학적으로 생각하게 하고, 역사가가 하듯이 사건을 다루게 하고, 지식획득 과정에 참여하게 하는 것이다. 앎은 과정이며 산물이 아니다. (Bruner, 1968, p. 72)

21. Category 이론의 기본 아이디어

○ 이 이론은 또한 다음과 같은 것을 강조하고 있다. 새로운 추상적인 대상이 어떤 특정한 방법으로 주어진 대상으로부터 구성될 때에는 언제나 그에 대응하여 야기된 그러한 새로운 대상에 관한 사상을 그들의 정의의 한 통합된 부분으로 간주하는 것이 바람직하다. 이러한 프로그램의 추구는 대상과 그 사상의 동시 고려를 포함한다. (우리의 용어로 이는 개별적 대상이 아닌 category의 고려를 의미한다). 사용된 사상의 형태를 상세화 하는 것을 이렇게 강조하면 포함된 여러가지 개념의 불변성의 정도를 보다 더 잘 통찰 할 수 있게 된다. … 이는 변환군을 가진 기하학적 공간이 사상의 대수를 가진 category로 일반화된다는 의미로, Klein의 Erlanger Program의 계속으로 간주될 수 있다. (Eilenberg, Maclane 1945, pp. 236~237)

22. Schema, Scheme의 구분

○ 이 논문이 헌정되는 예민한 저자의 저서를 읽어 보면 그의 이론체계의 중심이 되어 있는 이 용어 (schema)에는 여러 가지 해석이 있어 깜짝 놀랄 것이다. 그 가운데 두 가지 극단적인 것만을 생각해 보자. 일반적인 대수적 구조(군, 속 등)는 우리가 '조작적 scheme' 이라고 부르고 있는 것이다. 이와 반대로 지형학적 schema는 확실히 전자와는 다른 의미의 schema이다. 즉 이것은 어떤 정해진 현실의 간략히 단순화된 표상이다. 그 때문에 우리는 그것을 '표상적 schema(schema representatif)'라고 부르기로 하자. 이 두가지 의미작용 사이에는 무언가 혈족관계가 있다고 생각해도 좋을까? 확실히 있을 듯하다. 그러나 일련의 중간자가 이 두 극단적인 것의 사이에 늘어서 있다고 하는 조건 아래에서 그렇게 말할 수 있다. 솔직히 모든 철학을 무시하고 단순한 심리학자의 입장에서 보면, 우리는 '조작적 scheme'은 일종의 구성의 schema, 혹은 생산과정이며, '표상적 schema'는 일종의 구성된 schema라고 말하고 싶다. … 우리는 최초의 것을 일종의 schema화 되어가고 있는 schema(schema schematisant)이며, 두 번째 것은 일종의 schema화 된 schema(schema schemaised)라고 하는 것을 생각나게 까지 된다. (Piaget, 1950, p. 143)

23. 동화의 분류

○ 동화에는 주체가 동일 scheme을 반복 적용하는 재생적 동화, 주체가 새로운 대상이나 상황에 scheme의 적용분야를 계속 확대해 가는 일반화 동화, 주체가 scheme을 적용할 때 대상을 변별하든가 고정하든가 하는 것을 가능하게 하는 재인적 동화, 몇 가지 scheme 사이의 조정을 가능하게 하는 상보적 동화 등 기본적인 형태의 동화가 있다. (Piaget, et al., 1977)

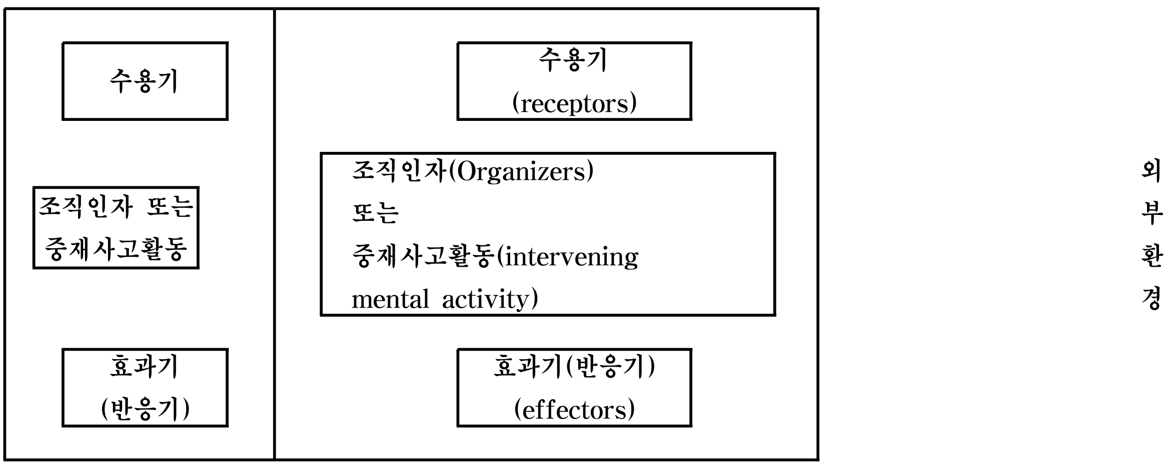
24. 수학적인 조작적 schemes의 변화

○ 논리-수학적 추상화의 경우, 주어져 있는 것은 주체 자신의 이전에 행한 행동이나 조작 및 그 결과의 집적이다. 이 경우 추상화는 첫째 이들 행동이나 조작 가운데의 하나의 존재를 인식하는 것. 즉 그 때까지 등한히 해온 것에 대해 그 잠재적 중요성에 주목하는 것이다. 예를 들면, 대응의 지각은 아동에게서 발견되지만 Cantor 이전까지는 수학적으로는 주목되지 못하였다. 둘째로, 주목된 행동은 다른 면 - 예를 들면, 실제적인 행동면과 대립되는 사고면, 혹은 구체적인 사고면에 대립되는 추상적인 조직화의 면(말하자면, 산술 대 대수)에 사상되어 (물리적인 의미에서) '반영'되지 않으면 안된다. 셋째로, 그것은 새로운 구조로 통합되지 않으면 안된다. … 그러나 그것은 이전의 구조를 새로운 사고면 특유의 요소와 통합함으로써 이전 구조의 범위를 확장 하지 않으면 안된다. (Piaget, 1971, p. 320)

25. schemes의 역동적인(나선적인) 재구성

○ 우리는 나선적인 과정을 주장하고 있다. (관찰할 수 있는) 내용의 모든 반사는 어떤 형식(반성)의 개재를 전제로 하며, 또한 이전된 내용은 반사에 의한 새로운 형식의 구성을 강요한다. 따라서 반사 → 반성 → 반사, 그리고(혹은) 내용 → 형식 → 보다 세련된 내용 → 새로운 형식 등과 같이 끊임 없는 교대가 행해진다. 그리고 (이 과정은) 절대적인 시작도 없고 끝도 없이 계속되어 개념영역은 점차 증대되어 간다.(Piaget et coll., 1977, p. 306)

26. Skemp의 사고과정 - 1999년 초 · 중등 교원임용평가 2번



27. Inhelder의 '논리-수학적인 경험'의 Pre-Curriculum적 제공 제안

○ 이 모든 것에 비추어, 누구든지 학교교육의 최초 2년 동안 논리적인 가법, 승법, 포함관계, 계열화 등의 기본 조작을 강조하면서 여러 가지 물체를 다루고 분류하고 순서에 따라 늘어 놓는 연습을 시키는 것이 효과적이 아닐까 하는 생각이 들 것이다. 왜냐하면 이런 논리적 조작이야말로 수학과 과학의 모든 분야에서 보다 특수한 조작과 개념의 기초를 이루는 것이기 때문이다. 사실인즉 그러한 조기의 과학 및 수학 '사전-교육과정'은 아동으로 하여금 수학과 과학의 주요 개념을 직관적으로, 또한 보다 귀납적으로 이해할 수 있도록 해줄 것이며, 아동의 이러한 이해는 나중에 수학과 과학의 정규의 교육과정에서 명확한 형태를 띄게 될 수 있을 것이다. 우리의 의견에 의하면 이러한 교육방법의 효과는 과학과 수학교육에 연속성을 부여한다는 것과, 또한 아동으로 하여금 기본개념을 보다 잘 또 보다 확실하게 이해하도록 한다는 것이다. 만약 이런 조기의 기반이 없을 때 아동은 나중에 그 기본개념을 입에 올릴 수는 있되 그것을 전혀 효과적인 방법으로 사용할 수는 없을 것이다. (Bruner, 1963, p. 46)

28. Dienes의 수학적 개념의 학습-지도 과정 6단계

○ 역동적 원리(dynamic principle) : 수학적 개념은 경험으로부터 구성되는 조작인바, 조작이 구성되도록 실제적인 경험을 거치는 성숙 사이클을 제공해야 한다. 조작이 형성되는 정해진 심리 역학 과정인 예비적인 게임 → 구조화된 게임 → 연습게임이란 자연스러운 과정에 따라 경험과 학습상황이 조작되어야 한다. 개념구성이 충분히 이루어질 때까지 새로운 사이클이 시도되어서는 안 된다. 아동들이 어린 동안에는 부득이 구체적인 자료를 다루어야 하지만, 모든 게임 가운데 가장 매력적인 수학연구의 맛을 보여주기 위하여 정신적인 게임을 점진적으로 도입할 수 있다.

○ 구성의 원리(constructivity principle) : 아동들은 논리적으로 사고할 수 있기 오래 전에 구성적으로 사고할 수 있다. 분석적 사고는 구성을 전제로 하며 분석은 12세까지의 아동의 학습에서 거의 결여되어 있다. 따라서 분석적 사고 보다 구성적 이해에 이를 수 있도록 학습상황을 조직하는 것이 좋다. 새로운 개념을 이미 알 고 있는 개념으로부터 구성되도록 해야 하며 그 논리적 관계는 그 후에 분석될 수 있다.

○ 수학적 다양성의 원리 (mathmatical variability principle) : 일반적인 수학적 개념을 이루는 불변인 특성이 드러나게 하기 위해서 비본질적인 모든 특성을 변화시켜야 한다. 변수를 포함하는 개념은 가능한 한 많은 경우를 다루는 경험에 의하여 학습되어야 한다. 개념의 적용 가능성의 범위는 그 일반성에 비례한다. 이는 수학적 개념의 충실한 일반화를 위한 전략이다.

○ 지각적 다양성의 원리(perceptual variability principle) : 추상화의 본질은 여러 가지 다른 상황에서 공통인 성질을 이끌어 내는 것이다. 개념형성에서 관련된 변수에 대하여 가능한 한 넓은 범위를 허용하기 위하여, 그리고 아동들이 추상적인 개념의 본질을 추측하도록 유도하기 위하여, 같은 개념을 지각적으로는 다르지만 구조적으로는 동치인 다양한 구체적인 자료로 제시해야 한다. 이는 다중 구체화의 원리 (multiple embodiment principle)라고도 하며 추상화를 용이하게 하기 위한 전략이다.

29. Descartes의 Euclid적인 종합적 양식 비판

○ 일찍이 철학의 첫 번째 발견자들이 수학에 숙달되지 않은 자를 지혜를 연구하는 데 받아들이기를 원하지 않았던 일이 왜 일어났는지 의아하게 생각되었을 때, 이 학문이 무엇보다도 접근하기가 가장 쉽고 다른 주요한 분야의 지식을 이해하도록 교육하고 준비시키는 데 매우 필요하다고 생각되었으므로, 내가 강력하게 의심한 것은 그들이 수학으로 인식한 것이 우리 시대의 사람들이 받아들이고 있는 것과 매우 달랐다는 점이었다. (Descartes, 1961, pp. 15-16)

30. Popper의 지식의 성장에 대한 규정

○ 지식, 특히 과학적 지식이 진전하는 길은 합리화되지 않은(합리화될 수 없는) 예상, 추정, 우리의 문제에 대한 잠정적인 해답, 추측에 의해서이다. 이들 추측은 비판에 의해서, 곧 엄격하게 비판적인 검사를 포함하는 기도된 반박에 의해서 조종된다. 그들은 이들 검사를 헤어날 수도 있지만, 확실하게 참인 것으로 확립될 수도 없으며, (확률계산이란 뜻에서) '확률적인' 것으로조차 확립될 수 없다. 우리의 추측에 대한 비판은 결정적으로 중요한 것이다. 우리의 오류를 이끌어 냄으로써 비판은 우리가 해결하려고 하는 문제의 어려움을 이해하게 해준다. 이것이 우리가 문제에 보다 더 정통하게 되고 보다 더 성숙한 해답을 제공할 수 있게 되는 방식이다. 어떤 견해, 곧 우리의 문제에 대한 어떤 중대한 잠정적인 해답의 반박 자체는 항상 진리에 보다 접근하는 일보 전진이다. 그리고 이것은 우리가 우리의 오류로부터 학습할 수 있는 방식이다. 우리는 우리의 오류로부터 학습하면서, 결코 알지 못할지라도, 곧 확실히 알지 못할지라도 우리의 지식은 성장한다.(Popper, 1963, p. Ⅶ)

31. Lakatos의 귀납의 논리에 대한 부정

○ 금세기의 수학적 발견술의 부활은 Polya의 덕분이다. 과학적 발견술과 수학적 발견술의 유사성을 그가 강조하고 있는 것은 그의 훌륭한 연구의 주요한 특징의 하나이다. 그의 유일한 약점으로 간주될 수 있는 것이 이러한 강점과 관련된다. 그는 과학이 귀납적이라는 데 결코 의문을 갖지 않았으며, 과학적 발견술과 수학적 발견술 사이의 깊은 유사성에 대한 그의 올바른 시각 때문에 그는 수학도 귀납적이라고 생각하게 되었다. (Lakatos, 1976, p. 119)

32. Lakatos - 발견술적 규칙

○ 규칙 1 : 추측을 하면 그 증명이나 반박에 착수하여라. 증명을 주의깊게 조사하여 자명하지 않은 보조정리의 목록을 마련하여라(증명분석). 추측에 대한 반례(전면적인 반례)와 의심스러운 보조정리에 대한 반례(국소적인 반례)를 양쪽 다 찾아보아라.

○ 규칙 2 : 전면적인 반례가 있으면 반례에 의해 반박될 적절한 보조정리를 증명분석에 추가하고 그 보조정리를 조건으로 합체시킨 개선된 추측으로 추측을 대체시켜라. 반례를 괴물이라고 보고 버려지도록 허용하지 말아라. 모든 감추어진 보조정리를 명백하게 하려고 시도하여라.

○ 규칙 3 : 국소적인 반례가 있으면 그것이 또한 전면적인 반례인지 아닌지 검사해 보아라. 만약 그러하면 규칙 2를 쉽게 적용할 수 있다.

○ 규칙 4 : 만일 국소적인 반례이지만 전면적인 반례가 아닌 반례가 있으면 반증되지 않는 보조정리로 반박된 보조정리를 대체시켜 증명을 개선하도록 시도하여라.

○ 규칙 5 : 만약 어떤 유형이든 반례를 얻었다면 연역적 추정에 의하여 그것들이 더 이상 반례가 되지 않는 보다 깊은 정리를 발견하도록 시도하라.

33. 엄밀한 연역 전개를 통한 교육적 의사소통

○ 그들이 수학에 대해 꽤 훌륭한 이해에 도달하고 그것을 그들의 학생들에게 전달할 수 있는 유일한 길은 그들 자료의 주의 깊은 제시를 통해서이다. 거기서 정의, 가정 및 논증은 어떤 오해도 피할 만큼 충분히 정밀하며, 가능한 오류와 함정은 필요성이 생길 때마다 지적된다. Dieudonne(1973, pp. 16-19)

○ 과학과 관련된 교수학적 문제는 제도화된 교육을 다룰 때 비로소 등장하는 이차적인 문제라기보다 과학의 구성요소로서 간주되는 것이 매우 자연스럽다. 이러한 과학의 '내적인 교수학'은 현존하는 지식의 경제적이고 명료한 배열, 개념과 언어의 개발과 선택 및 표준화, 그리고 지식, 해답, 도구 등에 대한 의견교환과 배포의 문제와 관련된다. Steiner(1988, p. 9)

34. Lakatos의 연역적 전개양식 비판

○ 연역주의자의 양식에서는 모든 명제는 참이고 모든 추론도 타당하다. 수학은 영원히 변치 않는 진리의 계속 증가하는 집합으로 제시된다. 반례, 반박, 비판 등은 도저히 들어올 수 없다. … (계속)

(이어서) 원시적인 추측, 반박, 증명에 대한 비판을 억압함으로써 이 과목에는 권위주의적인 분위기가 확보된다. … 전체적인 이야기는 사라져 버리고, 증명 절차를 거치는 과정에서의 그 정리에 대한 일련의 시험적인 형식화는 망각되도록 운명지어진 반면, 최종 결과는 성스러운 무오류성을 지닌 것으로 치켜세워진다. … 현재의 수학교육은 권위주의의 온상이며 독립적이고 비판적인 사고의 가장 나쁜 적이라는 사실이 아직도 충분히 자각되지 못하고 있다. (Lakatos, 1976, p. 216)

35. Rudin의 *Principles of Mathematical Analysis(1953)*에서의 평등수렴 개념의 도입방법을 예로 든 Lakatos의 연역적 전개 비판

○ 이러한 진술은 다음 두 가지 흠이 있다. (a) Rudin은 원초적인 추측과 그 반박만을 제시하고 있는 것이 아니라. 도리어 원초적인 추측이 참인지 거짓인지를 묻고, 잘 알려진 예에 의해 거짓임을 보이고 있다. 그러나 이렇게 함으로써 그는 무오류주의자의 양식을 넘지 않고 있다. 그의 '문제상황' 가운데에는 추측은 없고 도리어 날카롭고 정교한 질문이 있으며, 확고한 대답을 제공하는 (반례가 아니라) 예가 뒤따른다. (b) Rudin은 평등수렴의 개념이 증명으로부터 생긴다는 것을 보이고 있지 않으며, 도리어 그의 진술에서 정의가 증명에 선행한다. 이는 연역주의자의 양식에서 달리 될 수가 없을 것이다. 왜냐하면 만일 그가 먼저 원래의 증명을 제공하고 그리고 나서 비로소 반박에 뒤따라 개선된 증명, 증명생성 정의가 나온다면, (영원히 정적인) 수학의 움직임, Euclid적인 전통과 모순되는 (전혀 틀림이 없는) 수학의 오류 가능성을 드러냈을 것이다. (Rudin의 책을 계속 인용하고 있는 것은 그 책이 이러한 전통에 따른 가장 훌륭한 교과서 중의 하나이기 때문임을 아마도 덧붙여 두어야 할 것이다.) 서문에서, 예를 들어 Rudin은 다음과 같이 말한다. '어떤 정리의 가정이 결론의 타당성을 보증하는 데 참으로 필요하다는 것을 명백하게 보이는 것이 특히 초보자를 위하여 중요한 듯하다. 이러한 목적으로 꽤 많은 수의 반례가 교과서 가운데 포함되었다.' 불행히도 이들은 실제로 정리에 모든 가정을 포함시키려면 수학자들이 얼마나 현명해야 하는가를 보이는 예이므로 가짜 반례이다. 그러나 이들 가정이 어디에서 나오는가 하는 것. 그들은 증명 아이디어로부터 나온다는 것. … 수학자의 머리로부터 튀어나오지 않는다는 것을 그는 말하고 있지 않다. 그가 '반례'란 용어를 사용하고 있다는 것이 오류주의자의 양식을 기대하도록 우리를 오도해서는 안될 것이다.(Lakatos, 1976, pp. 219-220)

※ Lakatos는 자신이 주장하는 수학적 발견의 논리에 비추어 평등수렴 개념에 대하여 다음과 같은 발견적 교재구성 과정을 제시하고 있다.

① **원초적인 추측 : 연속함수의 임의의 수렴하는 수열의 극한함수는 연속이다.**

② **증명(원초적인 추측을 부분추측이나 보조정리로 분해하는 대강의 사고실험) : 연속함수에 대한 Cauchy의 정의와 증명**

③ **(전면적인) 반례(원초적인 추측에 대한 반례)의 출현 : 반례인 Fourier급수** $\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots$ **및 여러 가지 전면적인 반례의 제시**

④ **증명의 검토, 전면적인 반례가 국소적인 반례가 되는 '유죄인 보조정리'의 발견과 증명 및 추측의 개선, 새로운 증명생성 개념의 출현 : ε- δ방법에 의한 증명분석, 평등수렴 개념의 도입**

36. 분석법 Polya, 1962, pp. 27-28

○ 인식과정에서 주체의 능동적인 사고활동을 강조하는 현대철학의 창시자라고 일컬어지는 Descartes는 모든 문제를 해결할 수 있는 보편적인 방법을 찾으려는 꿈을 갖고 있었으며, 미완성으로 끝난 그의 연구 결과는 《방법서설》과 《정신 지향 규칙》가운데 정리되어 있다. 그 중에서 유명한 '규칙'이 그가 모든 문제의 해결에 이용되기를 바랐던 다음과 같은 사고 패턴이다.

첫째, 어떤 문제이든 수학문제로 환원하라
둘째, 어떤 수학문제이든 대수문제로 환원하라.
셋째, 어떤 대수문제이든 한 방정식의 풀이로 환원하라.

○ 이러한 패턴을 모든 경우에 적용할 수는 없지만 한없이 다양한 경우에 적용 가능하다. 해석기하학은 이러한 패턴에 따른 기하학의 연구이며, Euclid적인 전통에 도전하여 대수적 방법을 우선시킴으로써 현대수학과 과학의 발전에 결정적인 역할을 하였음은 잘 알려진 사실이다. 중고등학교 학생들이 방정식을 세워 문제를 해결할 때 이는 이러한 사고 패턴을 따르고 있는 것이다. 이러한 패턴의 핵심은 방정식을 세워 제시된 문제를 대수적인 언어로 번역하는 것인바, 이에 대한 Descartes의 다음과 같은 규칙은 주목할 만 하다.

① 우선 문제를 잘 이해한 다음에 문제를 어떤 미지인 양, 곧 수를 결정하는 문제로 환원하여라.
② 문제가 풀렸다고 보고 조건에 따라서 미지인 것과 자료 사이에 성립하여야 할 모든 관계를 적절한 순서로 그려보면서 문제를 아주 자연스럽게 개관하여라.
③ 같은 양을 두 가지 방법으로 나타낼 수 있도록, 조건의 일부분을 분리하여 미지인 것 사이에 성립하는 방정식을 얻도록 하라. 결국, 조건을 여러 부분으로 쪼개어 미지인 것의 개수만큼의 방정식으로 이루어진 연립방정식을 얻게 된다.
④ 연립방정식을 한 방정식으로 환원하여라.

37. Polya의 문제해결 교육론 - 현대적 발견술

z○ 수학적 정리를 증명하기에 앞서 먼저 추측을 해야 한다. 세세한 부분을 수행하기 전에 증명에 대한 아이디어를 추측해야 한다. 관찰한 것을 결합시키고 유추를 해야 한다. 몇 번이고 시도해 보아야 한다. 수학자의 창조적인 연구의 결과는 연역적 추론, 곧 증명이다. 그러나 그 증명은 개연적 추론, 추측에 의해 발견된다. (Polya, 1954, p. ⅵ)

38. Polya의 현대적 발견술

① 문제에 대한 이해 : 목표에 주의를 집중하기, 문제의 주요 부분에 주목하기, 조건에 주목하여 문제를 조망해 보기, 그림을 그리고 적절한 기호를 붙이기, 조건을 분해하여 써보기

② 계획의 작성 : 관련된 지식을 동원하기, 유용한 패턴 찾아보기, 관련된 문제나 정리를 알아보기, 미지인 것이나 결론이 같거나 유사한 문제를 생각해 보기, 관련된 문제의 풀이 결과와 방법을 활용하기 및 보조요소를 도입하여 그것을 활용하기, 문제를 달리 진술해 보기, 정의를 되짚어 보기, 보다 단순한 문제, 보다 일반적인 문제, 보다 특수한 문제, 유사한 문제 등 관련된 문제를 풀어보기, 미지인 것과 조건 및 자료를 변형하여 보조문제를 작성하여 문제를 부분적으로 해결해 보기, 진척이 없을 때 상황을 재평가하기, 자료, 조건, 핵심적인 개념의 사용여부 점검하기

③ 계획의 실행 : 매 단계를 점검하면서 풀어가기

④ 반성 : 풀이 결과와 논증과정을 점검하기, 다른 풀이 방법을 알아보기, 일별해 보기, 풀이 결과나 방법을 활용할 수 있는 문제를 찾아보기

39. Polya의 문제해결 교육론 - 메타 인지적 수업

○ 문제를 해결하는 법을 가르친다는 것은 의지의 교육이다. 자신에게 쉽지 않은 문제를 해결해 봄으로써 학생들은 실패를 통해 인내하는 것을 배우고, 조그만 진전의 가치를 평가하는 것을 배우며, 핵심적인 아이디어를 기다리는 것을 배우고, 그것이 나타났을 때 모든 힘을 집중시키는 것을 배운다. 만일 학생이 학교에서 해결방안을 찾으려고 노력하는 과정에서 일어나는 여러 가지 정서의 변화에 익숙해질 기회를 갖지 못한다면 그의 수학교육은 가장 중요한 점에서 실패할 것이다.

40. 수학연구에서 귀납추론의 중요성

○ 통상 순수수학이라고 불리는 수리과학의 그 부분에서조차도 관찰에 커다란 중요성을 부여하는 것은 매우 역설적인 것으로 생각될 것이다. 왜냐하면 관찰은 감각에 인상을 지우는 물리적 대상에 한정된다는 것이 현재의 견해이기 때문이다. 우리는 수를 순수지성에만 의지해야 하므로 관찰실험이 수의 성질을 탐구하는 데 어떻게 유용할 수 있는지 거의 이해할 수 없다. 그러나 실제로 내가 여기서 아주 충분한 이유가 있어서 보여주려고 하듯이 오늘날 알려져 있는 수의 성질은 대부분 관찰에 의해 발견되었으며, 그 진실성이 엄밀한 논증에 의해 (계속)

(이어서) 확증되기 오래 전에 발견되었다. 우리가 잘 알고 있지만 아직 증명할 수 없는 수의 성질도 많이 있다. 우리를 그 지식에로 안내한 것은 관찰일 뿐이다. 따라서 우리는, 아직 매우 불완전한, 수론에서 관찰에 가장 큰 희망을 걸 수 있다는 것을 알고 있다. 관찰은 우리를 계속해서 새로운 성질로 안내할 것이며, 그 후에 우리는 그것을 증명하려고 노력할 것이다. 관찰에 의해서만 뒷받침되고 아직 증명되지 않은 유형의 지식은 참인 것과 주의 깊게 구별되어야 한다. 우리가 통상 말하고 있듯이 그것은 귀납에 의해 얻어진다. 그러나 우리는 단순한 귀납이 오류에 이른 경우를 보아왔다. 따라서 우리가 관찰에 의해서 발견한, 귀납에 의해서만 뒷받침되는, 그러한 수의 성질을 참인 것으로 받아들이지 않도록 많은 주의를 해야 한다. 실제로 우리는 그러한 발견을 발견된 성질을 더 정밀하게 조사하고 증명하거나 반증할 기회로 사용해야 한다. 어느 경우든 우리는 유용한 것을 배울 것이다. (Polya, 1954, p. 3)

41. 유추

○ 유추는 예술적 표현과 최고 수준의 과학적 업적에는 물론이고, 우리의 모든 사고와 일상 회화, 그리고 사소한 결론에 충만해 있다. 유추는 매우 다양한 수준에서 사용된다. 사람들은 종종 애매하고 불명료하며 완전하지 못하거나 충분히 설명되지 않은 유추를 사용하지만, 유추는 수학적인 정확성의 수준에 도달할 수도 있다. 모든 종류의 유추는 해답을 찾아내는 데 일익을 담당할 수 있으므로 우리는 어떤 종류의 유추도 무시해서는 안된다. (Polya, 1986, p. 233)

42. 대중 수학교육의 중요성

○ 교육자는 고도의 정신을 가진 사람에 의해서 행해지는 활동으로서의 수학의 상이 학생들에게 굳어지는 것을 예방해야 한다. … 지적인 천부 가운데 수학만큼 실제적이고 조화있게 교육에 관계되는 것이 없다. 그러나 거기서 우리는 또한 교육의 내용적인 것과 형식적인 것에 끼워 넣는것과 함께 피교육자의 인격에 끼워 넣는 것을 강조하여야 한다. (Freudenthal, H., 1963, S.13)

○ 수학이란 확실성을 추구해 가는 정신적 활동으로, 상식에 바탕을 두고 더 높은 차원으로 상식화되면서 발전해 나아가는 과정이다. 지식은 상식적으로 납득될 때 확실성을 얻는다. 일상적인 언어가 된 '수'나 '닮음'과 같이, 상식화된 수학의 구성을 바탕으로 개념이 발달하며, 다라서 수학은 현실성을 갖게 된다. 수학은 상식적인 내용이 체계화 · 형식화되고 다시 그 형식은 다음 단계의 상식적인 내용이 되는 과정이 반복되는 활동이며, 따라서 내용과 관계가 풍부한 구조에서 빈약한 구조로 발달해 나아간다. 그러나 수학의 연역적 체계는 그와 반대로 일반적이며 추상적인 '빈약한' 구조에서 특수한 '풍부한' 구조로 위계적으로 전개된다.

43. Freudenthal의 기존 지식교육의 바탕 비판

① 교육 심리학에서 일반적으로 받아들여지고 있는 형식적인 수준에서의 개념에 대한 개념, 곧 Aristoteles의 ‘최근류 + 종차’란 개념은 조작적이 못되는 부적절하고 진부한 것이다.

② 교육과정과 교과서 분석을 통해 교수목표를 추출하여 세분화, 상세화한 다음 의견조사를 거쳐 교수목표를 형식화 하는 방법은 행동주의의 산물로 대부분 부정직하고 비과학적인 피상적인 것이며 유행으로 볼 수 있다.

③ 전통적인 지식교육에서는 시험지에 의해 측정된 수치가 교육의 목적 자체가 되면서 교육의 책무성은 회계술이 되고 통계적 방법이 남용된다.

④ Gagne의 학습의 분류와 과제 분석은 수학학습과의 괴리가 너무 큰 것이며, 수학을 잘 모르는 교육학자의 연구 결과로 이를 수학교육에 적용하는 것은 잘못이다.

44. Freudenthal의 수학 교육학적 현상 규정

○ 어떤 수학적 개념, 수학적 구조, 수학적 아이디어의 현상학이란, 그것이 그 조직수단이 되는 현상과 관련시켜 본질을 기술하는 것, 어떤 현상을 조직하기 위해서 그것이 창안되고 어디로 확장될 수 있는지, 그리고 그것이 이들 현상에 대하여 조작화의 한 수단으로 어떻게 작용하며, 그것은 이들 현상에 대하여 어떤 힘을 우리에게 부여하는가를 지적하는 것을 뜻한다. 만일 본질과 현상과의 이러한 관계에서 내가 교수학적 요소를 강조하면, 곧 그 관계가 학습-지도 과정에서 어떻게 획득되는가에 주목하면 나는 이러한 본질에 대한 교수학적 현상학에 대하여 말하고 있는 것이다. (Freudenthal, H., 1983, pp. 28-29)

45. 조작적 구성주의 - 추상화

○ ‘밝다’를 ‘여기 밝음이 있다’로 변형하는 추상화, 이런 본질적인 추상화는 … 매우 특별한 사고양식이다. … 점은 움직인다. 여기서 기하학자가 점은 ‘ 선을 그린다’고 말하는 것은 추상화에 의해서이다. 이 선은 추상적 개념이지만 그 자체가 움직인다. 그리고 이것이 면을 생성하는 것으로 생각된다. 등등. 마찬가지로 해석학자가 연산 자체를 연산의 대상으로 다룰 때, 이는 그 유용성을 부정할 수 없는 방법인데, 이는 추상화의 또다른 예가 된다. … 이들 보기는 수학적 사고의 대양에서의 추상화의 굽이치는 거대한 물결을 나타낸다. 그러나 우리가 수학적 사고를 상세히 검토하게 되면 모든 부분에서 같은 사고형태의 끊임없는 잔물결을 발견할 것이다. Peirce(1956, pp. 1777-1778)

○ 이러한 종류의 패턴화는 바로 수학적 사고의 본질이다. 더욱이 확립된 패턴은 곧바로 수학적 대상으로 간주되게 되며, 이는 그 이상의 패턴에 들어 맞는다. 이것은 다시 친근해지면서 대상으로 간주되며 같은 현상이 반복된다. … 그것을 문법적으로 보면 술어가 또 다른 술어에 대한 주어가 되고, 이는 다시 또 다른 술어에 대한 주어가 된다. 이러한 종류의 끊임없는 열려진 사고가 수학적 사고의 본질이라면, 그것은 세속적인 일상적 사고형태와 분명히 근본적으로 다른 것이다. 학습과 사고의 문제를 연구한 심리학자들은 거의 수학자가 아니었다. 아마도 이것이 이러한 다소 특수한 분야에서 일어나는 학습을 설명하는 적절한 이론이 지금까지 제시되지 못한 이유일 것이다. Dienes(1960, pp. 19-21)

46. Brousseau의 교수상황 구분

○ Brousseau는 교수의도란 측면에서 교수상황을 두 가지로 구분하여 설명하고 있는데, 그 하나는 '교수학적 상황'이고 다른 하나는 '비 교수학적 상황(adidactical situation)'이다. 먼저 교수학적 상황에서는 교사가 학생들에게 제시할 '문제'를 사려깊게 선택하여 학생들에게 인지적 불균형을 야기시키고 기대했던 적응을 이끌어 내려고 시도한다. 그러한 문제는 점차 학생들 스스로 동기화되어 행동하고 생각하고 발전시켜 가도록 선택되어야 한다. 교사는 학생들이 마치 자신의 것인양 문제를 받아들이는 시점과 대답을 하는 시점 사이에 학생들이 구성하기를 바라는 지식이 끼어들게 하거나 드러나게 암시하는 것을 삼가야 한다. 교사가 정보를 제공하고 발견술적인 질문을 하여 조심스럽게 도와주던 상황에서 학생 스스로 탐구하느 상황으로 이행해 가야 한다. 학생들은 그렇게 할 수 있을 뿐만 아니라, 그가 다른 교수 맥락에서 만나게 될 상황이나 어떤 교수의도도 없는 가운데에서도 자기 스스로 탐구하게 될 때 비로소 지식을 진정으로 획득하게 될 것이기 때문에 그렇게 해야 한다. 그렇게 하기 위해 교수학적 의도가 감추어진 상황을 Brousseau는 의도적인 비교수학적 상황이라고 부른다. 비 교수학적 상황은 교사의 중재 없이도 수학적 지식이 문제해결의 도구로 구성되고 기능할 수 있는 상황이다. 여기서 학생들은 문제가 새로운 지식을 획득시키기 위한 목적으로 선택된 것이라는 사실을 알고, 그 지식이 상황의 내적인 논리에 의해서 전체적으로 정당화되며, 그것을 구성해 낼 수 있다는 것을 느껴야 한다.

47. Dienes effect

○ Brousseau는 1960년대 '새 수학' 운동에 적지 않은 영향을 미친 Dienes이론에 대해 교수학적 계약의 입장에서 다음과 같이 비판한다. Dienes는 소위 '심리역학'에 의해서 '구조화된 놀이' 속에서 구조의 유사성을 인식하고 추상된 구조를 형식화하게 하는 교수모형을 제안한 바 있다. Dienes의 교수방법은 학습자의 내적인 '심리역학'에 기초하므로, 자료의 선택, 활동의 제시 및 그 사용을 독려하는 것 이상의 주도권을 교사에게 남겨 놓지 않는다. 또한 Dienes의 게임은 학생들에게 주어지는 여러 가지 놀이규칙, 놀이의 구조가 그들이 학습해야 할 것과 같다는 것을 가정하기 때문에 만족스럽지 않다. 놀이의 규칙을 이해하려면 학생들은 그들에게 가르치게 되어 있는 지식을 '심리역학'에 의해 소위 '구성'해야 한다. 만일, 규사가 먼저 규칙을 가르치면 놀이는 연습문제로 변형되므로 학생들에게 규칙을 추측하게 한다. 결국 교수학적 계약에서 교사가할 일을 하지 않음으로 해서 학습활동은 부적절하게 일어나게 된다. 교사가 자신의 노력과 무관한 효과에 의해 성공을 확신하면 할수록 실패할 가능성이 더 커진다. 모든 교수이론에 교사-학생의 관계를 통합시킬 필요성을 보여주는 이러한 현상을 Brousseau는 'Dienes 효과'라고 부르고 있다.

48. 계산기와 컴퓨터에 대한 NCTM의 입장

(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)

○ 적절한 계산기를 모든 학생들에게 언제든지 이용할 수 있게 해야 한다.
○ 컴퓨터를 모든 교실에서 시범을 목적으로 이용할 수 있게 해야 한다.
○ 모든 학생들은 개인적인 연구나 집단 연구를 위해 컴퓨터에 접근할 수 있어야 한다.
○ 학생들은 문제를 탐구하고 해결하기 위해 정보를 처리하고 계산을 수행하는 도구로서 컴퓨터를 사용하는 법을 배워야 한다.

49. 피아제 & 비고스키

피아제	비고스키
발달단계의 보편적·불변적 계열성	사회구조와 유기체구조 간의 역동적 산물
발달의 개인차 무관심	발달의 개인차 관심
발달의 포섭적 팽창	발달의 나선적 팽창
사고가 언어의 연합	사고와 언어의 연합

50. 학습자 내부의 정보 처리과정

학습과정		수업사태	특징 및 구체적인 예
주의	1	주의력 획득하기	·다양한 방법으로 학습자에게 주의력을 획득시키는 단계 ·이것은 중요하다:이것은 항상 알고 있어야 해:나무에서는 잎이 왜 떨어질까?
동기화	2	학습자에게 수업목표 알리기	·학습이 끝났을 때의 조건이 무엇인지에 대해 기대감을 주는 단계 ·이 단원이 끝나면 여러분은 다음과 같은 것을 할 수 있을 거야
선택적 지각	3	선수학습 회상하기	·학습자가 새로운 정보를 학습하는데 필요한 기능을 숙달하는 단계 ·교사는 먼저 새로운 학습과 관련된 선수학습이 무엇인지를 결정해야 하고, 그 다음 그것을 지적해 주거나 다시 회상시켜야 한다.
	4	자극제시 하기	·학습자에게 학습할 내용을 제시하는 단계이다. ·학습은 새로운 정보의 제시를 요구한다.
의미적 부호화 장기 기억에 저장	5	학습안내 제시하기	·학습할 과제의 모든 요소들을 통합시키는 데 필요한 방법을 제시하는 것이다. ·이전 정보와 새로운 정보를 적절히 통합시키고 그 결과를 장기기억에 저장할 수 있도록 학생들은 도움이나 지도를 받아야 하는데. 이를 통합교수라 칭한다.
탐색과 회상 수행	6	수행유도 하기	·통합된 학습의 요소들이 실제로 학습자에 의해 실행되는 단계이다. ·이 단계에서는 학습자가 실제로 새로운 학습을 했는지를 증명하는 기회를 준다. ·연습문제를 작성하거나, 숙제를 하거나, 수업시간에 질문에 대답하거나, 그들이 배운 것을 실습할 수 있는 기회를 제공함으로써 유발된다.
피드백	7	피드백 제공하기	·이 단계는 수행이 얼마나 성공적이었고 정확했는지에 대한 결과를 알려준다. ·피드백을 통해서 학생들은 그들의 최초의 목표를 달성할 수 있는지를 알게 되고 수행의 개선에 필요한 학생들은 얼마나 더 많은 연습이 필요한지를 알게된다.
	8	수행평가 하기	·이 단계에서는 다음 단계의 학습이 가능한지를 알기 위한 평가를 실시한다. ·시험상황은 단순한 암기가 아니라 이해가 이루어졌는지를 점검하기 위해서 전에 주어진 상황과 유사한 문제사태를 제공해야 한다.
	9	파지와 학습의 전이 증진하기	·새로운 학습이 다른 상황으로 일반화되거나 적용할 수 있는 경험을 제공해야 한다. ·이 단계의 특징은 반복과 적용이다. ·예로서 분수와 혼합된 수의 덧셈은 추상적으로 학습하였지만 이러한 지식을 개집을 짓기 위해 나무를 측정하는 것과 같은 실제상황에 적용하도록 하는 것이 유용할 것이다.